# DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Francesco Bonaldi e Camillo Enrico

## Introduzione

Si definiscono disequazioni trigonometriche le disequazioni nelle quali l'angolo incognito è espresso mediante funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente etc.).
Gli angoli verranno sempre espressi in radianti.

Va ricordata la corrispondenza tra angoli in radianti e in gradi :

| Radianti | Gradi |
|---|---|
| $\pi$ | 180° |
| $\frac{\pi}{2}$ | 90° |
| $\frac{3}{2}\pi$ | 270° |
| $2\pi$ | 360° |

Le formule per il passaggio da gradi a radianti e viceversa sono :

$\alpha_r = \frac{\pi\alpha^\circ}{180}$ e $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\alpha_r$

dove $\alpha_r$ e $\alpha^\circ$ sono le misure dell'angolo rispettivamente in radianti e in gradi.
Ricordiamo che le funzioni trigonometriche sin x e cos x sono periodiche di periodo $2\pi$, mentre la funzione tan x è periodica di periodo $\pi$ .
Questa proprietà può essere espressa formalmente con le seguenti relazioni:

$\sin(x+2k\pi) = \sin x \quad \forall x \in Z$

$\cos(x+2k\pi) = \cos x \quad \forall x \in Z$

$\tan(x+k\pi) = \tan x \quad \forall x \in Z$

[dove Z rappresenta l'insieme dei numeri interi positivi, negativi e lo zero]
Pur applicandosi gli stessi principi studiati per le disequazioni algebriche, occorre in aggiunta considerare il campo di variabilità delle varie funzioni trigonometriche e più precisamente :

- sin x e cos x sono funzioni definite su tutto l'asse reale e assumono, al variare dell'angolo, tutti e soli i valori reali compresi nell'intervallo [-1 , 1] : questo significa che sono funzioni limitate;

• tan x è invece funzione definita su tutto l'asse reale con l'eccezione dei punti : $\frac{\pi}{2} + k\pi$ in cui non è definita, e assume, al variare dell'angolo, tutti i valori reali compresi nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ ; va notato che li assume già nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

**Le disequazioni trigonometriche più comuni**

Esaminiamo ora i tipi più comuni di disequazione trigonometrica. Ne forniamo le tecniche di soluzione per ciascun tipo, tramite esempi risolti e commentati.

*Disequazioni elementari*

A) <u>sin x > a</u>

Se $a \geq 1$ : impossibile (la funzione sin x è limitata tra -1 e + 1) .

Se $a < -1$ : sempre vera (qualunque valore di x soddisfa la disequazione; la funzione sin x è sempre > -1) : $\forall x \in R$ .

Se $a = -1$ : vera $\forall x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ [infatti : $\sin(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi) = -1$]

Se $-1< a <1$ : scelto α tale che $\sin \alpha = a$ con $0 \leq \alpha < 2\pi$, le soluzioni sono :

$\alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi$, $\forall K \in Z$.

*Esempi :*

• $\sin x > \frac{1}{2}$. Disegnando (vedi Fig.1) la circonferenza goniometrica e la retta $y = \frac{1}{2}$, cerchiamo tutti gli angoli per cui l'ordinata dei punti di intersezione con la circonferenza è maggiore di $\frac{1}{2}$. Ricordando che gli angoli (compresi tra 0 e 2 π) aventi per seno $\frac{1}{2}$ sono : $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, otteniamo la soluzione :

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

Tenendo in considerazione poi la periodicità (periodo 2π) della funzione sin x, la soluzione generale sarà espressa dalla relazione :

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, $\forall k \in Z$.

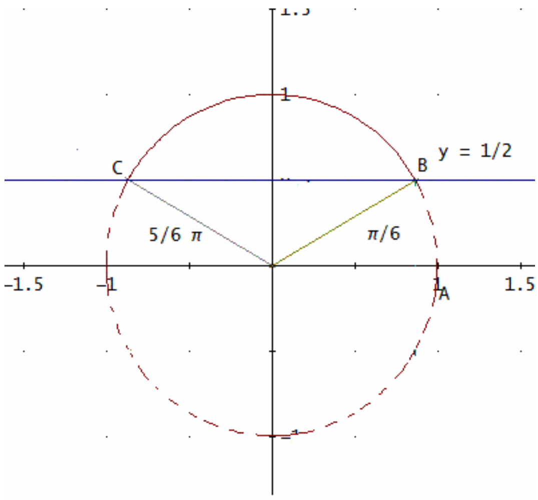


*Fig. 1 (*)*

- $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. In modo analogo (vedi Fig.2) si tracciano la circonferenza trigonometrica e la retta $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e si cercano tutti gli angoli per cui l'ordinata dei punti di intersezione con la circonferenza è maggiore di $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ricordando che gli angoli ( compresi tra 0 e $2\pi$ ) aventi per seno $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono : $\frac{5}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$, si ottengono le soluzioni :

$2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ e $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ , $\forall k \in Z$.

[Facendo uso degli angoli negativi le soluzioni si possono anche esprimere così :

$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ ]

(*) In tutte le figure le soluzioni sono indicate con archi a tratto continuo.

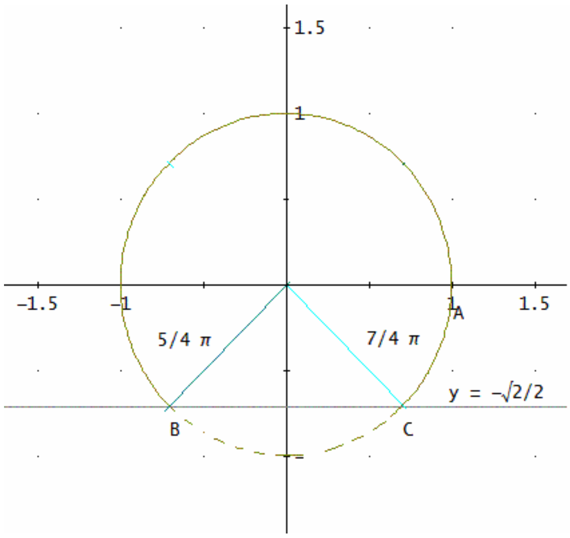


*Fig. 2*

B) <u>sin x < a</u>

se a > 1 disequazione sempre vera, qualunque valore di x la soddisfa , la funzione sin x è sempre <1 : $\forall$ x $\in$R .

se a $\leq$ -1 impossibile, nessuna soluzione, la funzione sin x è sempre $\geq$ -1

se a = 1 vera $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ [ infatti $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$]

se -1 < a < 1 scelto $\alpha$ tale che sin $\alpha$ = a con $0 < \alpha \leq 2\pi$, le soluzioni sono : $2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ e $\pi - \alpha + 2k_1\pi < x < 2\pi + 2k_1$ , $\forall$ k, $k_1 \in Z$ .

*Esempio:*

- $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si traccino (vedi Fig.3) la circonferenza goniometrica e la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vanno cercati tutti gli angoli per cui l'ordinata dei punti di intersezione con la circonferenza sia minore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ricordando che gli angoli (compresi tra 0 e 2 $\pi$) aventi per seno $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono: $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$, si ottengono le soluzioni : $2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

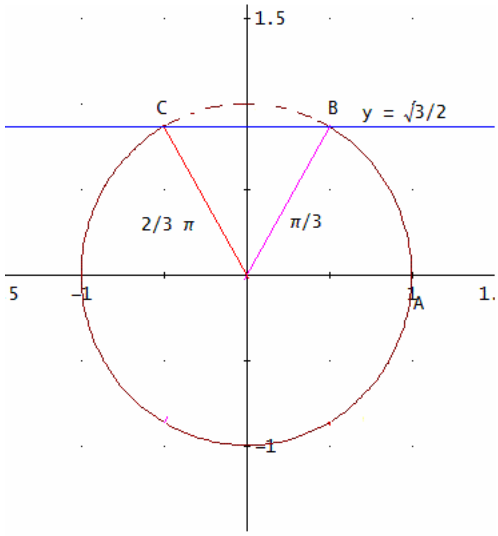


*Fig.3*

C) cos x >a

se a $\geq$ 1 disequazione impossibile, nessuna soluzione; la funzione cos x è limitata tra –1 e 1.

se a< -1 sempre vera, qualunque valore di x soddisfa la disequazione; la funzione cos x è sempre > -1 : $\forall$ x $\in$R .

se a= -1 vera $\forall$ x $\neq$ $\pi$ +2 k$\pi$ ; [ infatti : cos($\pi$ +2 k$\pi$ ) = -1 ]

se -1<a<1 scelto $\alpha$ tale che cos $\alpha$ = a con 0<x $\leq$ $\pi$ , le soluzioni sono :

$-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$ , $\forall$ k $\in$Z

*Esempio* :

- cos x > $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si traccino ( vedi Fig.4) la circonferenza goniometrica e la retta x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vanno cercati tutti gli angoli per cui l'ascissa dei punti di intersezione con la circonferenza è maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ricordando che l'angolo, compreso tra 0 e π, avente per coseno $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è : $\frac{\pi}{6}$, si ottiene la soluzione :

$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ che si può anche esprimere così :

$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $\frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$

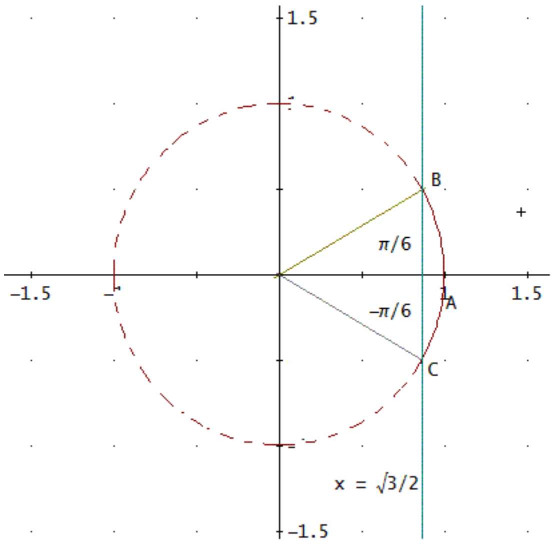


*Fig. 4*

D) $\cos x < a$

se $a>1$ disequazione sempre vera : $\forall\ x \in R$, la funzione $\cos x$ è sempre $<1$.

se $a< -1$ impossibile, nessuna soluzione ; la funzione $\cos x$ è sempre $\geq -1$ .

se $a = -1$ vera $\forall\ x \neq \pi +2\,k\pi$ ; [ infatti : $\cos(\pi +2\,k\pi)= -1$]

se $-1 < a < 1$, scelto $\alpha$ tale che $\cos \alpha = a$ con $0 \leq \alpha < \pi$ le soluzioni sono :

$\alpha +2\,k\pi < x < 2\,\pi- \alpha +2\,k\pi$ , $\forall\ k \in Z$

*Esempio*

• $2 \cos x < 1$. Si traccino (vedi Fig.5) la circonferenza goniometrica e la retta $x = \frac{1}{2}$. Si devono cercare tutti gli angoli per cui l'ascissa del punto di intersezione con la circonferenza sia $< \frac{1}{2}$. Ricordando che l'angolo compreso tra 0 e $\pi$ avente per coseno $\frac{1}{2}$ è: $\frac{\pi}{3}$, le soluzioni sono : $\frac{\pi}{3}+2\,k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2\,k\pi$ , $\forall\ k \in Z$ , che si possono anche esprimere così: $\frac{\pi}{3}+2\,k\pi < x < (2k+1)\,\pi$ e $(2k-1)\,\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2\,k\pi$

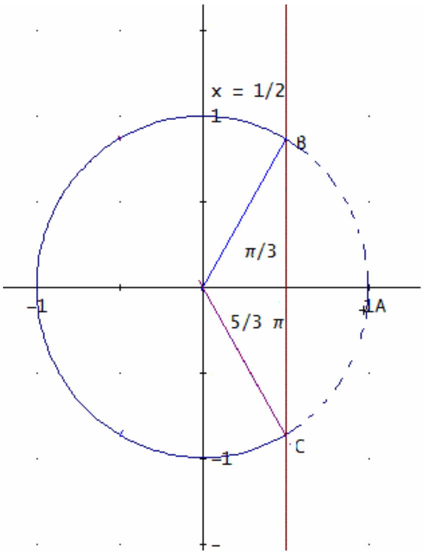


*Fig. 5*

E) Passiamo ora a studiare le disequazioni : tan x > a e tan x< a, con a $\in$ R.

In questo caso, è più comodo fare riferimento al grafico della funzione y= tan x, qui sotto riportato (vedi Fig.6)

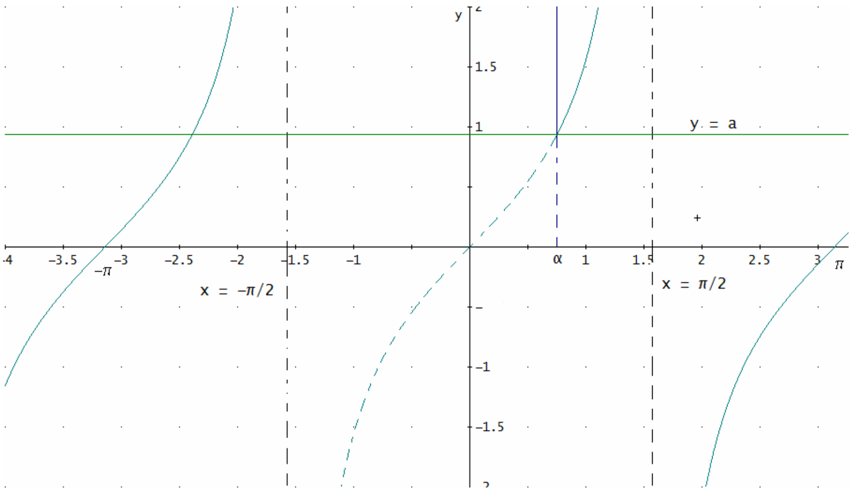


*Fig. 6*

E' opportuno ricordare nuovamente che la funzione tan x ha periodo pari a π e non è definita nei punti di ascissa pari a : $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall\ k \in Z$.

Facendo riferimento alla Fig. 6, in cui è tracciata anche la retta y=a, lo schema che si ottiene è il seguente:

tan x > a. Scelto $\alpha$ in modo che tan $\alpha$ = a , con $\alpha$ compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, esaminando il grafico, si vede che le soluzioni sono :

$\alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $\forall$ k $\in Z$ .

*Esempio*

- tan x > $-\sqrt{3}$ . Tracciata sul grafico della funzione y= tan x la retta y= $-\sqrt{3}$ , si trova che l'angolo, compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e avente per tangente $-\sqrt{3}$ , è : $-\frac{\pi}{3}$. Si devono ora determinare gli angoli la cui tangente è> $-\sqrt{3}$ .

Chiaramente (vedi Fig. 7) la soluzione è : $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $\forall$ k $\in Z$ .

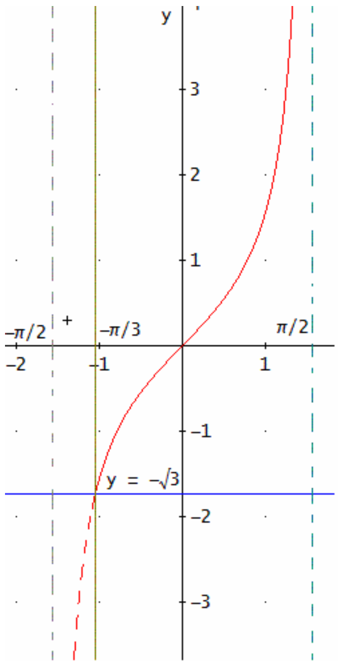


*Fig. 7*

tan x < a . Scelto $\alpha$ in modo che tan $\alpha$ = a con $\alpha$ compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, esaminando il grafico ( vedi Fig. 7) , è immediato dedurre che la soluzione è :

$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi$

*Esempio*

- $\tan x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

Tracciata sul grafico (vedi Fig.8) la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, si trova che l'angolo, compreso tra

$-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, avente come tangente $\frac{\sqrt{3}}{3}$, vale : $\frac{\pi}{6}$

La soluzione è pertanto : $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$

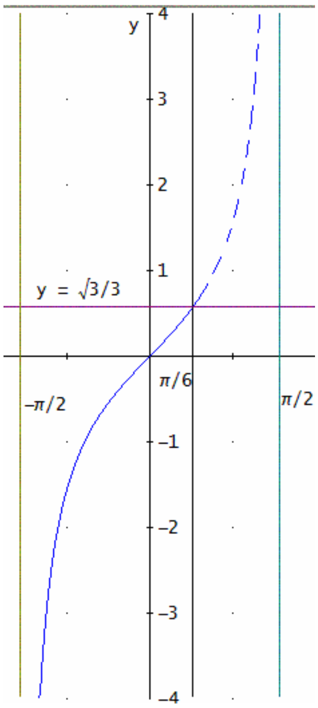


*Fig. 8*

*Disequazioni lineari*

Sono le disequazioni trigonometriche del tipo : a sin x + b cos x > ( oppure <) c .

Le equazioni lineari si possono risolvere con vari metodi ( quello dell'angolo aggiunto, quello grafico oppure facendo uso delle formule parametriche) : lo stesso vale per le disequazioni.

Ci soffermiamo su due di essi :

I ) Metodo dell'angolo aggiunto

II ) Metodo grafico

I ) Risolviamo con il *metodo dell'angolo aggiunto* la seguente disequazione :

$\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{3}$

Dividiamo entrambi i membri per : $\sqrt{a^2 + b^2}$ ; nel nostro caso : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2$ .

Si ottiene quindi:

$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

ricordando inoltre che : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e che : $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la disequazione può essere così riscritta:

$\sin x \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos x > \sin\frac{\pi}{3}$

o anche:

$\sin(x - \frac{\pi}{3}) > \sin\frac{\pi}{3}$, ponendo : $t = x - \frac{\pi}{3}$ si ottiene:

$\sin t > \sin\frac{\pi}{3}$. Per risolvere questa disequazione, usiamo il cerchio trigonometrico (vedi Fig. 9) oppure il grafico della funzione seno :

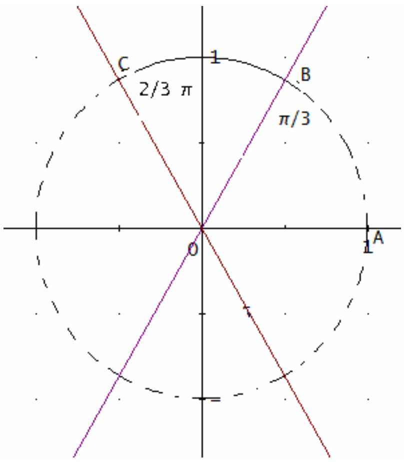


*Fig. 9*

In tal modo otteniamo :

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

Sostituendo poi a t il valore : $x - \frac{\pi}{3}$,dopo semplici calcoli si arriva alla soluzione richiesta :

$2k\pi + \frac{2}{3}\pi < x < 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$, : $\forall k \in Z$.

Come altro esempio di uso del metodo dell'angolo aggiunto si risolva questa disequazione :

- $\sin x - \cos x \geq \sqrt{2}$.

Dividiamo entrambi i membri per : $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e otteniamo :

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x \geq 1$

essendo $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, si può riscrivere la disequazione nel modo seguente :

$\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x \geq 1$ e quindi :

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$ ; ponendo : $t = x - \frac{\pi}{4}$ si ottiene : $\sin t \geq 1$.

La funzione sin t è limitata tra –1 e 1; quindi il segno > non sarà applicabile per nessun valore di t , mentre il segno = porta alla soluzione :

$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e quindi : $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ da cui alla fine la soluzione :

$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ \forall k \in Z$ .

II ) Applichiamo ora il *metodo grafico* alla soluzione della disequazione :

$\sqrt{3}\sin x + \cos x > \sqrt{3}$ .

Il metodo consiste nel porre : cos x = X ; sin x = Y. In tal modo la disequazione si trasforma nel sistema seguente :

$$\begin{cases} \sqrt{3}Y + X > \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

(che è la ben nota identità : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ed è rappresentata in Fig. 10 dalla circonferenza).

Rappresentiamo ora la retta e la circonferenza facenti parte del sistema nel piano cartesiano XOY e determiniamo <u>i punti della circonferenza</u> le cui coordinate soddisfino la disequazione:

$\sqrt{3}Y + X > \sqrt{3}$

Questa condizione si può riscrivere : $Y > -\frac{\sqrt{3}}{3}X + 1$ e individua un semipiano determinato dalla retta r di equazione : $Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}X + 1$ . Per determinare quale sia il semipiano, scegliamo un punto di coordinate molto semplici , ad es. O(0,0) e vediamo se la disequazione è verificata in quel punto, sostituendo al posto di X e Y i valori 0,0 :

$0+0 > \sqrt{3}$ : chiaramente non è verificata. Allora il semipiano individuato dalla disequazione è l'altro, non contenente l'origine e che sta al "disopra" della retta r ed è indicato in arancione nella figura.

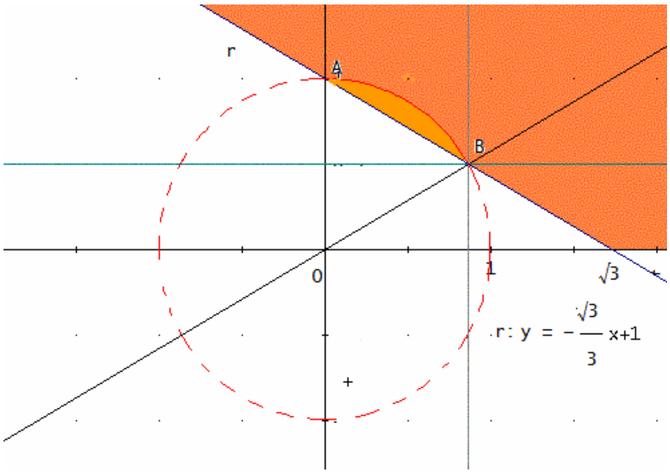


*Fig. 10*

Facilmente si calcola che i punti di intersezione tra circonferenza e retta, cioè i punti chiamati A e B nella Figura hanno coordinate :

A ( 0 ; 1) B ( $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\frac{1}{2}$ )

Come già detto sopra, il semipiano delimitato dalla retta r è quello colorato in arancione e i punti richiesti che soddisfano la disequazione sono pertanto quelli dell'arco AB (in grassetto nella figura). Questi punti sono definiti dalle seguenti relazioni :

$0 < X < \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2} < Y < 1$

Le soluzioni della disequazione iniziale sono quindi :

$0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2} < \sin x < 1$ corrispondenti a :

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ \forall k \in Z$

Infatti, mentre la condizione : $\frac{1}{2} < \sin x < 1$ implica:

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ , la ulteriore condizione : $0 < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ restringe la soluzione al primo quadrante, cioè a :

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$.

La periodicità ( pari a $2\pi$ ) delle funzioni seno e coseno giustifica l'aggiunta : $+2k\pi$.

*Disequazioni di 2° grado*

Si risolvono come le disequazioni algebriche (di secondo grado), seguendo le stesse regole; si scelgono quindi gli intervalli esterni o interni alle soluzioni trovate, e ci si trova così a dover risolvere delle disequazioni trigonometriche elementari.

*Esempi*

- $2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0$

  Si risolve l'equazione associata : $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ e se ne trovano le radici che sono : $\sin x = 1$ e $\sin x = -\frac{1}{2}$.

  Le soluzioni saranno dunque date dalle soluzioni delle seguenti disequazioni elementari (dovendosi scegliere le soluzioni esterne all'intervallo delle radici) :

  a) $\sin x > 1$ che non ha nessuna soluzione

  b) $\sin x < -\frac{1}{2}$ che ha invece la soluzioni (vedi Fig. 11) :

  $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ ; esse sono quindi le soluzioni cercate.

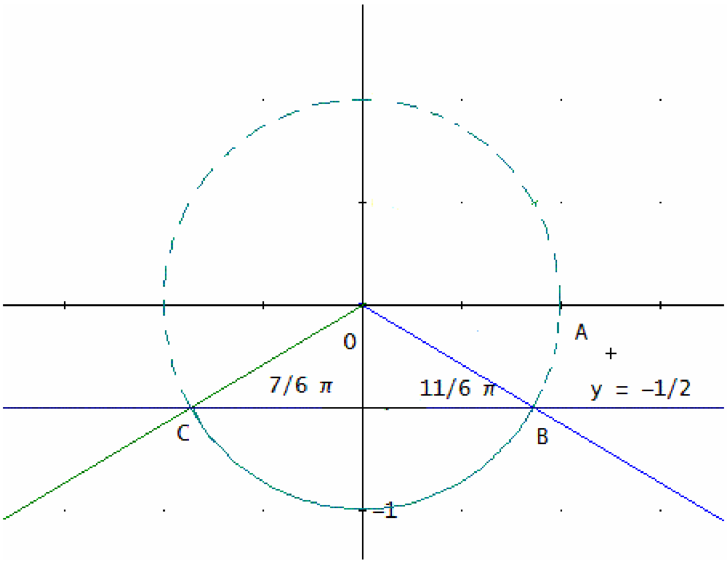


*Fig.11*

- $5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x > \frac{5}{2}$

  Conviene esprimere la disequazione soltanto in funzione di sin x , utilizzando la identità :

  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  Quindi , dopo semplici passaggi, si ha :

  $8\sin^2 x + 2\sin x - 3 > 0$

  Risolvendo l'equazione associata , si ottengono le radici : $\sin x = \frac{1}{2}$ e $\sin x = -\frac{3}{4}$.

Le soluzioni saranno quindi date dalle soluzioni delle seguenti disequazioni elementari :

$\sin x > \frac{1}{2}$ e $\sin x < -\frac{3}{4}$ [ che equivale a : $x < \arcsin(-\frac{3}{4})$ ]

Le soluzioni sono ( vedi Fig. 12a e 12b ) :

a) $\frac{\pi}{6}+2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi+2k\pi$ b) $(2k+1)\pi+\arcsin(\frac{3}{4}) < x < 2(k+1)\pi - \arcsin(\frac{3}{4})$ .

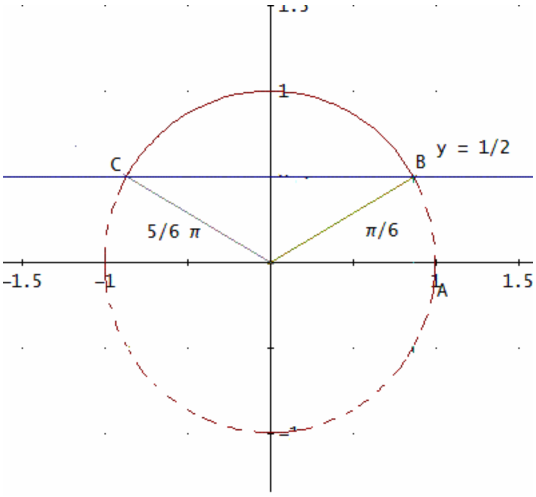

*Fig. 12 -a*

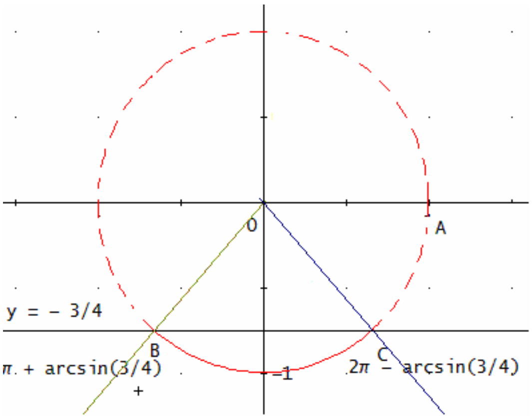

*Fig. 12-b*

E' il caso di dare qualche spiegazione sulla soluzione b) la cui espressione analitica non è probabilmente di immediata comprensione .

Gli angoli ( o archi ) che esprimono la soluzione b) sono quelli compresi tra AOB e AOC (sono entrambi <u>angoli concavi</u>, maggiori di $\pi$ ).

Poiché l'angolo DOB ( come anche l'angolo AOC) hanno seno pari a $\frac{3}{4}$ ne consegue che : AOB = $\pi$ + DOB e quindi l'angolo AOB si può esprimere come : $\pi+\arcsin(\frac{3}{4})$ .

Similmente, essendo l'angolo AOC $=2\pi$ -AOC lo si può esprimere come : $2\pi - \arcsin(\frac{3}{4})$ .

Per dare generalità alla soluzione va poi aggiunto: $2k\pi$ .

Si possono ora riprodurre su un'unica figura le soluzioni ( vedi Fig.13) :

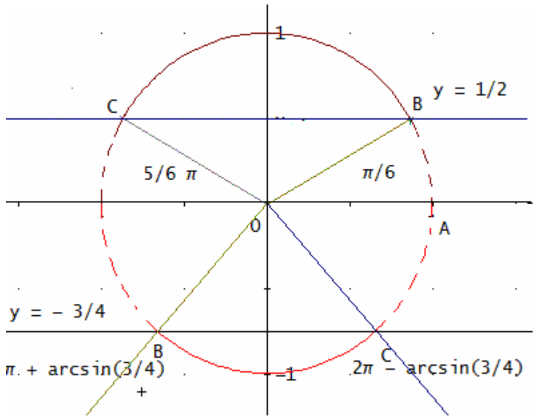


*Fig.13*

- $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 > 0$

Le radici dell'equazione corrispondente sono :

$\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $\tan x = \sqrt{3}$ ; perciò la disequazione è soddisfatta per :

$\tan x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e per $\tan x > \sqrt{3}$ ( vedi Fig. 14 )

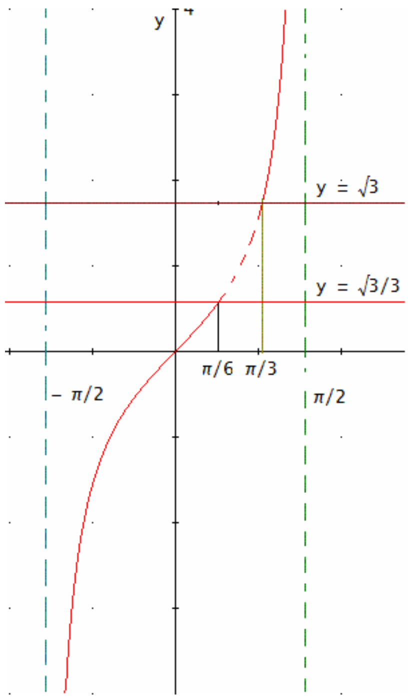


*Fig 14*

Le equazioni corrispondenti hanno come soluzioni rispettivamente :

$x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ e $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Facilmente si deduce dal grafico che le soluzioni della disequazione sono :

$-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{6}+k\pi$ e $\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$.

- $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$

L'equazione corrispondente ha le soluzioni :

$\cos x = -2$ e $\cos x = \frac{1}{2}$

Pertanto le soluzioni si ottengono risolvendo la seguente disequazione :

$-2 < \cos x < \frac{1}{2}$

Considerando che $\cos x > -2$ è sempre verificata per qualunque valore di x , resta da risolvere la disequazione $\cos x < \frac{1}{2}$.

L'equazione corrispondente, cioè $\cos x = \frac{1}{2}$ , ha come soluzioni ( vedi Fig. 15 ) :

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

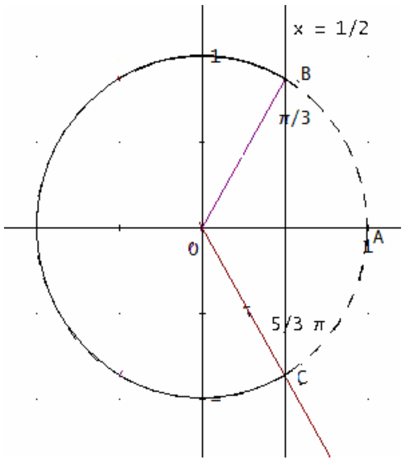


*Fig. 15*

Si ottiene pertanto, con riferimento alla figura, la soluzione :

$\frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi+2k\pi$

*Disequazioni varie*

Prendiamo ora in considerazione disequazioni che non rientrano in nessuno dei tipi precedentemente descritti o che sono tali da richiedere una speciale attenzione.

E' bene premettere una osservazione di carattere generale :
se, per arrivare alla soluzione di una disequazione, si devono moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per una funzione che può assumere valori positivi o negativi, è necessario operare con molta cautela.
E' noto che se una relazione di disuguaglianza, senz'altro vera, ad esempio $5 > 3$ , viene moltiplicata per un numero negativo (ad esempio -1), perché sia ancora vera, si deve cambiare verso alla relazione.
La quale diventa così $-5 < -3$ ( ed è vera) .
E' evidente che non sarebbe invece vera $-5 > -3$ .
Nell'eventualità in cui si moltiplichino o si dividano entrambi i membri di una disequazione, non per un *numero*, che è o positivo o negativo, ma per una *funzione*, diciamo f(x). che può assumere valori positivi e negativi, bisogna considerare due casi :
a) $f(x) > 0$ : la moltiplicazione o divisione non producono alcun cambiamento nel verso della disequazione.
Si dovrà solo avere l'avvertenza , una volta giunti alle soluzioni, di considerare solo quelle che cadono negli intervalli in cui $f(x) > 0$; le altre soluzioni andranno scartate.
b) $f(x) < 0$ : in questo caso la moltiplicazione o divisione *produrrà un cambiamento nel verso della disequazione.*
Una volta giunti alle soluzioni, si dovranno considerare solo quelle che cadono negli intervalli in cui è $f(x) < 0$ ; le altre soluzioni andranno scartate.

Un *esempio* servirà a chiarire :
• $\tan x > 1$ , che per il nostro scopo riscriviamo così (anche se la disequazione potrebbe essere risolta direttamente) :
$\frac{\sin x}{\cos x} > 1$ [ ovviamente $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ etc.]
Adesso, si devono moltiplicare entrambi i membri per : cos x .
Questa funzione è positiva per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ , mentre è negativa per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ .
Si procede così :

a) $\cos x > 0$ $[0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi]$
si ottiene quindi : $\sin x > \cos x$ .
La Fig.16 rappresenta il grafico di sin x e di cos x .

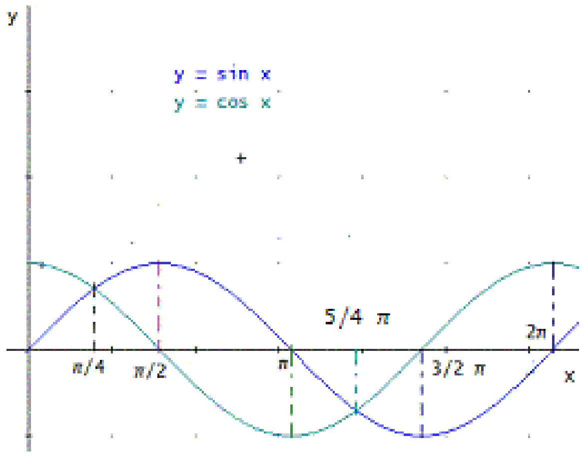


*Fig.16*

Vediamo che sin x > cos x per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$ e, per quanto detto prima, si dovrà considerare come soluzione soltanto : $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Infatti il restante intervallo $(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi)$ andrà escluso perché in esso sin x è negativo.

b) cos x < 0 $\quad [\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi]$

si ottiene dunque : sin x < cos x

sempre dal grafico precedente (Fig.16) si vede che la disequazione è verificata per : $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$.

Di questi due intervalli si deve considerare solo l'intervallo $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ ; infatti i restanti intervalli ( $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ ) vanno esclusi perché in essi cos x è positivo.

Concludendo la soluzione cercata è:

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ .

*Esempio*

- $2 \sin x - 1 < 2 \cos x - \tan x$

Anche questa disequazione richiede la stessa attenzione della precedente. Esplicitando tan x come $\frac{\sin x}{\cos x}$ otteniamo :

- $2 \sin x - 1 < 2 \cos x - \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad [x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}]$

Si dovranno considerare due casi :

a) $\cos x > 0$ [ nella soluzione potranno essere considerati solo gli angoli: $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

e $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < (2k+1)\pi$ per i quali cos x è positivo: gli altri vanno scartati ]

Si ottiene :

$2 \sin x \cos x - \cos x - 2\cos^2 x + \sin x < 0$ da cui, raccogliendo opportunamente a fattor comune

$(2\cos x + 1)$, si ottiene:

$(2\cos x + 1)(\sin x - \cos x) < 0$

Per trovare le soluzioni di questa disequazione, conviene ricorrere a due cerchi trigonometrici concentrici (vedi Fig. 17) :

- in quello più interno si riporterà l'andamento del segno di : $2\cos x + 1$
- nell'altro si riporterà invece l'andamento del segno di : $\sin x - \cos x$

Ricordiamo dalle disequazioni elementari che è :

$2\cos x + 1 > 0$ ( $\cos x > -\frac{1}{2}$ ) per $0 < x < \frac{2}{3}\pi$ e $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$ mentre è :

$2\cos x + 1 < 0$ per $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$

ed inoltre :

$\sin x - \cos x > 0$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$ mentre è :

$\sin x - \cos x < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$.

Per quanto detto sopra bisogna limitarsi alle soluzioni contenute nel I e IV quadrante (dove è $\cos x > 0$) .

Facendo il prodotto dei segni, intervallo per intervallo, si ottiene che la disequazione è soddisfatta per :

$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < (2k+1)\pi$

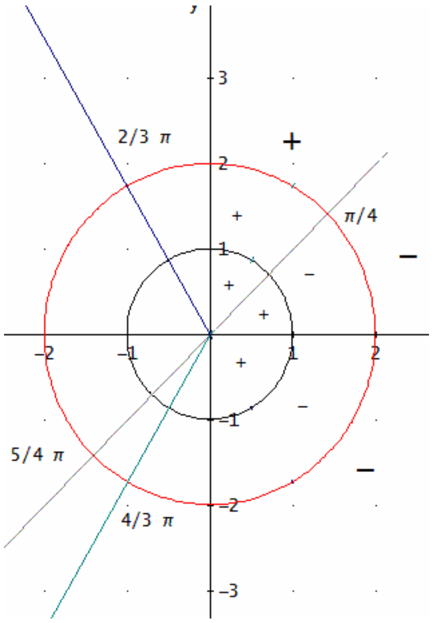


*Fig. 17*

b) va ora considerato : cos x < 0 [ ci limiteremo quindi nella soluzione agli angoli :

$2k\ \pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\ \pi + \frac{3}{2}\pi$ per i quali cos x è negativo , gli altri vanno scartati ]

Essendo cos x < 0 , il moltiplicare entrambi i membri della disequazione per cos x , implica dover cambiare verso alla disequazione stessa, che diventa :

( 2 cos x +1) ( sin x –cos x ) > 0

Ricorriamo ancora a due cerchi trigonometrici concentrici ( vedi Fig. 18) :

- in quello più interno riportiamo l'andamento del segno di : 2 cos x +1
- in quello più esterno l'andamento del segno di : sin x –cos x

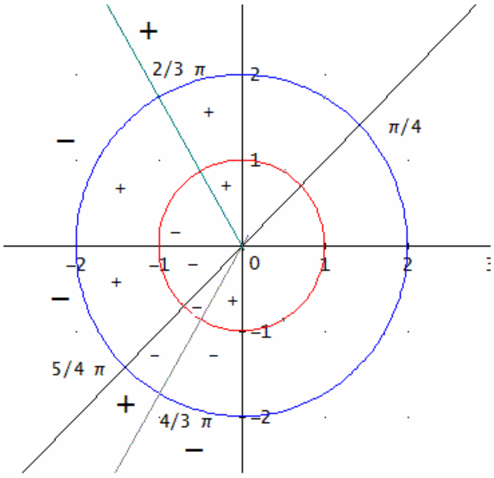


*Fig. 18*

Dall'esame della figura si deduce che la disequazione è soddisfatta per :

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi \quad e \quad 2k\pi + \frac{5}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{4}{3}\pi$$

Riassumendo, le soluzioni sono :

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$2k\pi + \frac{5}{4}\pi < x < 2k\pi + \frac{4}{3}\pi$$

$$2k\pi + \frac{3}{2}\pi < x < (2k+1)\pi$$

L'esempio che segue tratta di una disequazione facilmente risolubile con le formule di prostaferesi :

- $\frac{\cos 7x - \cos 3x}{\sin x \cos x} \geq 0$

Usando le formule sopra citate si ottiene :

$\frac{-2\sin 5x \sin 2x}{\sin x \cos x} \geq 0$ da cui ( essendo $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ e semplificando ) si ottiene :

$-4 \sin 5x \geq 0$ e quindi :

$\sin 5x \leq 0$

Ponendo : $5x = t$ si ottiene : $\sin t \leq 0$ le cui soluzioni sono :

$2k\pi + \pi < t < 2k\pi + 2\pi$, cioè a dire :

$(2k+1)\pi < 5x < 2\pi(k+1)$ e finalmente :

$(2k+1)\frac{\pi}{5} < x < \frac{2}{5}\pi$.

*Esempio* di disequazione di 2° grado riconducibile a omogenea

- $\cos^2 x + 4 \cos x \sin x < 2 + \sin^2 x$

Ricordando che si può porre $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ si ottiene :

$\cos^2 x + 4 \cos x \sin x < 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + \sin^2 x$ da cui, dividendo per $\cos^2 x$ e riducendo i termini simili, si ottiene:

$3 \tan^2 x - 4 \tan x + 1 > 0$ .

L'equazione associata ha come soluzioni :

$\tan x = 1$ ; $\tan x = \frac{1}{3}$

Pertanto la disequazione è soddisfatta per $\tan x > 1$ e per $\tan x < \frac{1}{3}$

Osservando il grafico della funzione $\tan x$ (Fig. 19)

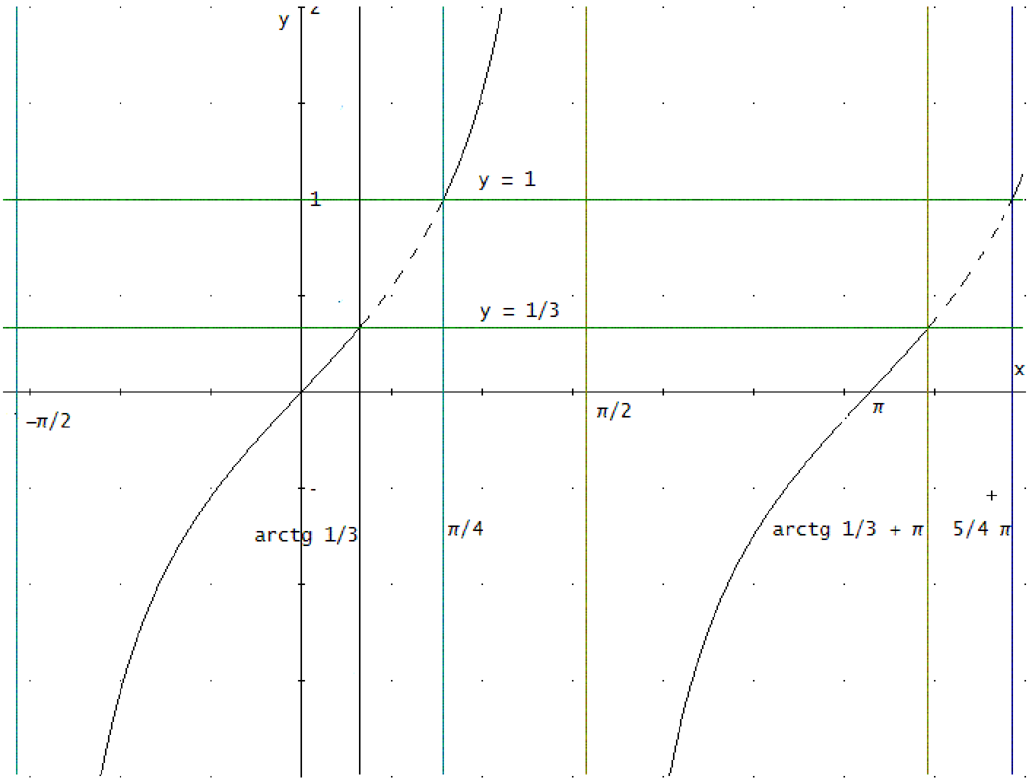


*Fig.19*

Si ricavano le soluzioni :

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \arctan\frac{1}{3} + k\pi \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

*Esempio*

- $\dfrac{\tan^2 x-1}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{\cos x} < 0$ . Questa disequazione mostra chiaramente l'utilità del metodo delle

circonferenze goniometriche concentriche.

Indipendentemente da quale sia il verso della disequazione ( > oppure < ), si esaminano per il numeratore e il denominatore gli intervalli in cui essi sono, ad es., maggiori ( o minori) di zero. Usando poi la regola dei segni, si determina in ogni sottointervallo quale sia il segno risultante e quali siano quindi le soluzioni. Chiaramente questo metodo può essere usato anche nel caso di prodotto (o quoziente) di più di due fattori.

Ritorniamo ora allo studio della disequazione e osserviamo che l'equazione equivalente del numeratore : $\tan^2 x - 1 = 0$ è risolta da : $\tan x = \pm 1$ e di conseguenza : $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ .

Il numeratore ($\tan^2 x - 1$ ) è quindi > 0 per $\tan x > 1$ e per $\tan x < -1$, cioè per $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ , mentre è < 0 per $-1 < \tan x < 1$ che significa per : $k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ e per : $\dfrac{3}{4}\pi + k\pi < x < \dfrac{5}{4}\pi + k\pi$ .

Il denominatore ( cos x ) è > 0 per $\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ e per $2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ , mentre è < 0 per $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi$ .

Rappresentiamo ora la situazione nel grafico ( vedi Fig. 20), in cui il cerchio interno rappresenta il segno di $\tan^2 x - 1$, e quello esterno il segno di cos x .

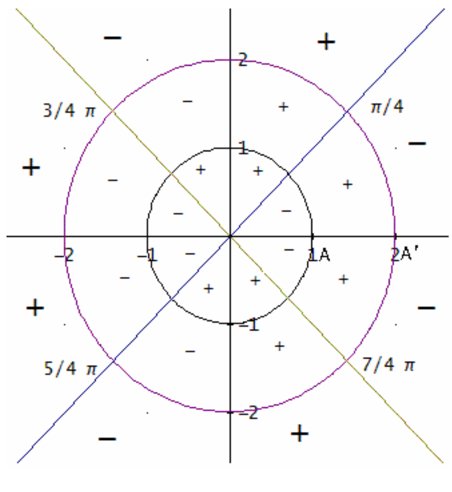


*Fig.20*

All'esterno del cerchio di raggio maggiore è indicato il segno complessivo della frazione, ottenuto applicando la regola dei segni al numeratore e al denominatore.

Quindi le soluzioni sono :

$k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ ; $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi$ ; $\frac{5}{4}\pi + k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k\pi$ ;

$\frac{7}{4}\pi + k\pi < x < (2k+1)\pi$

*Esempio* di disequazione con l'uso delle formule di bisezione :

- $2\cos^2\frac{x}{2} > 1 - \cos x$ che si trasforma in :

$1+\cos x > 1- \cos x$ e quindi :

$\cos x > 0$ le cui evidenti soluzioni sono, come si vede in Fig. 21

$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$.

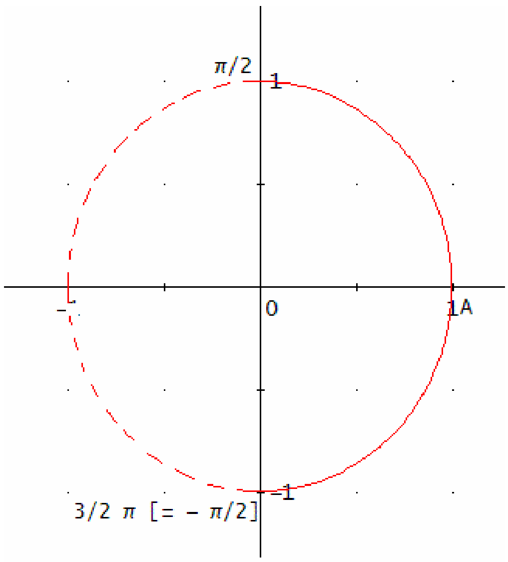


*Fig.21*

Le soluzioni possono anche esprimersi così : $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Come ultimo *esempio* si propone una disequazione biquadratica :

- $8\sin^4 x - 10\sin^2 x + 3 < 0$ [ limitare le soluzioni nell'intervallo $0 < x < 2\pi$ ]

Ponendo : $t = \sin^2 x$ la disequazione diventa :

$8t^2 - 10t + 3 < 0$

Le radici dell'equazione associata sono :

$t = \frac{3}{4}$ e $t = \frac{1}{2}$.

La disequazione è pertanto verificata per :

$\frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}$ che significa :

$\frac{1}{2} < \sin^2 x < \frac{3}{4}$ . Questa relazione si spezza nelle due disequazioni sotto indicate :

a) $\sin^2 x > \frac{1}{2}$ le cui soluzioni sono : $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin^2 x < \frac{3}{4}$ le cui soluzioni sono : $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Poiché le soluzioni cercate devono soddisfare le condizioni a) e b), tracciamo il grafico (vedi Fig.22) :

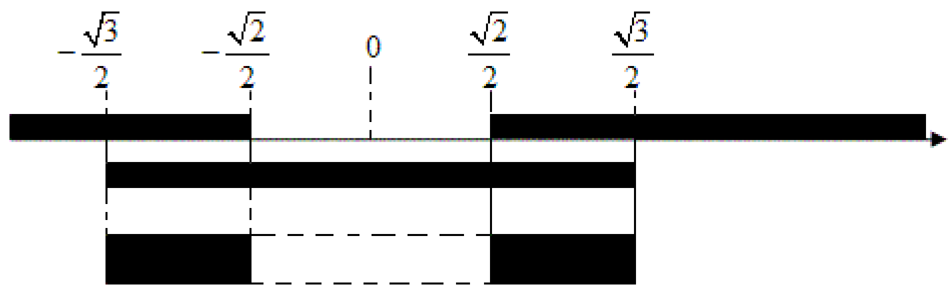


*Fig.22*

si vede quindi che gli intervalli comuni sono :

$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ricordando che le soluzioni delle equazioni corrispondenti sono :

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $x = \frac{4}{3}\pi$ e $x = \frac{5}{3}\pi$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $x = \frac{5}{4}\pi$ e $x = \frac{7}{4}\pi$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3}{4}\pi$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{2}{3}\pi$ .

Utilizzando il cerchio trigonometrico (vedi Fig. 23)

Si ottengono le soluzioni cercate :

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$ ; $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ ; $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ ; $\frac{5}{3}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$ .

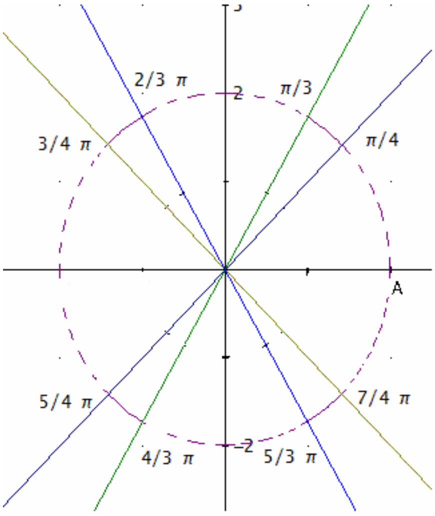


*Fig. 23*

**Test di autovalutazione**

a) $2\cos^2 x - \cos x < 0$

b) $\sin x + \cos 2x < 1$

c) $\frac{2\cos x - 3}{\sin x} \leq 0$

d) $\frac{\sin^2 x - 2}{\cos x} < 0$

e) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$

f) $5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x > \frac{5}{2}$

g) $\sqrt{3}\sin x + \cos x > 1$

h) $\sin x < \sqrt{3}\,(1 - \cos x)$

i) $\dfrac{3\tan x + \sqrt{3}}{\cot x + \sqrt{3}}(2\sin x - 1) < 0$

j) $\dfrac{|2\sin x + 1|}{1 - \sin x} > 0$

k) $\cos^2 x - |\sin x| > 1 + \sin x$

<u>Soluzioni</u>

a) $[\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 5\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ]$

b) $[\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\ ]$

c) $[\ \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\ ]$

d) $[\ 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\ ]$

e) $[\ 2k\pi < x < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi\ ;\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2(k+1)\pi\ ]$

f) $[\ 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5}{6}\pi\ ;\ 2k\pi + \pi + \arcsin\frac{3}{4} < x < 2k\pi + 2\pi - \arcsin\frac{3}{4}\ ]$

g) $[\ 2k\pi < x < 2k\pi + \frac{2}{3}\pi\ ]$

h) $[\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi\ ]$

i) $[\ 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\ ]$

j) $[\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ]$

k) [ nessun valore di x ]