Soluzione degli esercizi sull'ellisse

Esercizio 1. *Determina le misure degli assi dell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.
<u>Soluzione.</u> L'ellisse interseca gli assi nei punti $(\pm 6, 0)$, $(0, \pm 3)$, quindi gli assi hanno lunghezza pari a $2\cdot 6 = 12$ e $2\cdot 3 = 6$.

Esercizio 2. *Determina le misure degli assi dell'ellisse di equazione* $3\,x^2+\frac{y^2}{9}=4$.
<u>Soluzione.</u> L'ellisse interseca gli assi nei punti $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ e $(0, \pm 6)$, quindi gli assi hanno lunghezza pari a $2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ e $2\cdot 6 = 12$.

Esercizio 3. *Determina le coordinate dei fuochi dell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.
<u>Soluzione.</u> Risulta $a = 5$ e $b = 2$. Dato che $a > b$ i fuochi dell'ellisse appartengono all'asse x ed hanno coordinate $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{25-4}\,,\,0\right)=\left(\pm\sqrt{21}\,,\,0\right)$.

Esercizio 4. *Determina le coordinate dei fuochi dell'ellisse di equazione* $25\,x^2+4\,y^2=100$.
<u>Soluzione.</u> Dividendo per 100, l'equazione dell'ellisse può essere riscritta nella forma $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$; risulta $a = 2$ e $b = 5$. Dato che $a < b$ i fuochi dell'ellisse appartengono all'asse y ed hanno coordinate $F_{1,2}=\left(0\,,\,\pm\sqrt{25-4}\right)=\left(0\,,\,\pm\sqrt{21}\right)$.

Esercizio 5. *Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti tali che la somma delle distanze dai punti* $(-6, 0)$ *e* $(6, 0)$ *è uguale a* 20.
<u>Soluzione.</u> Si tratta dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, con $a=\frac{20}{2}=10$, $c = 6$ e $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{100-36}=8$. L'equazione pertanto risulta essere $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

Esercizio 6. *Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti tali che la somma delle distanze dai punti* $(0, -8)$ *e* $(0, 8)$ *è uguale a* 20.
<u>Soluzione.</u> Si tratta dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, con $b=\frac{20}{2}=10$, $c = 8$ e $a=\sqrt{b^2-c^2}=\sqrt{100-64}=6$. L'equazione pertanto risulta essere $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$.

Esercizio 7. *Determina l'equazione dell'ellisse avente per fuochi i punti* $(-2, 0)$ *e* $(2, 0)$ *e passante per il punto di coordinate* $(-2, 3)$.
<u>Soluzione.</u> La somma delle distanze del punto $(-2, 3)$ dai due fuochi è pari a $3 + 5 = 8$. Si ha quindi $a=\frac{8}{2}=4$, $c = 2$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$. L'equazione pertanto risulta essere $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

Esercizio 8. *Determina l'equazione dell'ellisse, riferita ai propri assi, passante per i punti* $A(-1, 1)$ *e* $B\left(\frac{17}{11}, -\frac{3}{11}\right)$.
<u>Soluzione.</u> Sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \\ \frac{\frac{289}{121}}{a^2}+\frac{\frac{9}{121}}{b^2}=1 \end{cases} \quad \text{ponendo } \alpha=\frac{1}{a^2} \text{ e } \beta=\frac{1}{b^2} \text{ si ha } \quad \begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \frac{289}{121}\,\alpha+\frac{9}{121}\,\beta=1 \end{cases}$$

risolvendo l'ultimo sistema si trova $\alpha=\frac{2}{5}$, $\beta=\frac{3}{5}$; ricordando che $a^2=\frac{1}{\alpha}$ e $b^2=\frac{1}{\beta}$, la corrispondente equazione *canonica* dell'ellisse è $\frac{x^2}{\frac{5}{2}}+\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1$ oppure, più semplicemente, $2\,x^2+3\,y^2=5$.

Esercizio 9. *Determina le equazioni dell'ellisse, riferita ai propri assi, passante per il punto* $A(2, 0)$ *e tangente alla retta* $x + 3\,y - 4 = 0$.
<u>Soluzione.</u> Ponendo $\alpha=\frac{1}{a^2}$ e $\beta=\frac{1}{b^2}$ l'equazione dell'ellisse è $\alpha x^2+\beta y^2=1$; il passaggio per A si traduce nell'equazione $4\,\alpha = 1$, mentre per quanto riguarda la condizione di tangenza dobbiamo imporre che il sistema

$$\begin{cases} \alpha x^2+\beta y^2=1 \\ x+3\,y-4=0 \end{cases}$$

ammetta soluzioni coincidenti: si trova la condizione $16\,\alpha\beta - 9\,\alpha - \beta = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4\,\alpha = 1 \\ 16\,\alpha\,\beta - 9\,\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

si trova $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$, quindi l'equazione canonica dell'ellisse è $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$.

Esercizio 10. *Determina le coordinate dei punti di intersezione tra l'ellisse di equazione* $x^2 + 4\,y^2 = 2$ *e la retta di equazione* $y = \frac{1}{4}\,x - \frac{1}{4}$.

Soluzione. La retta può essere riscritta nella forma (più comoda per i calcoli) $x = 4\,y + 1$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4\,y^2 = 2 \\ x = 4\,y + 1 \end{cases}$$

si trovano i punti $A\left(-1\,,\,-\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{7}{5}\,,\,\frac{1}{10}\right)$.

Esercizio 11. *Determina le equazioni delle rette tangenti all'ellisse* $3\,x^2 + 5\,y^2 = 8$ *condotte dal punto* $P(6, -2)$.

Soluzione. Scritta l'equazione della generica retta passante per $P(6, -2)$, $y = m(x - 6) - 2$, basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} 3\,x^2 + 5\,y^2 = 8 \\ y = m(x - 6) - 2 \end{cases}$$

ammetta soluzioni coincidenti. Si arriva così all'equazione $125\,m^2 + 90\,m + 9 = 0$, da cui si ricavano $m_1 = -\frac{3}{5}$ e $m_2 = -\frac{3}{25}$; le corrispondenti equazioni delle rette tangenti sono $y = -\frac{3}{5}\,(x - 6) - 2$ e $y = -\frac{3}{25}\,(x - 6) - 2$.

Esercizio 12. *Determina l'equazione della retta tangente all'ellisse* $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{\frac{10}{9}} = 1$ *nel suo punto* $P(1, 1)$.

Soluzione. Per l'ellisse può essere utilizzata l'equazione $x^2 + 9\,y^2 = 10$. Scritta l'equazione della generica retta passante per $P(1, 1)$, $y = m(x - 1) + 1$, basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 9\,y^2 = 10 \\ y = m(x - 1) + 1 \end{cases}$$

ammetta soluzioni coincidenti. Si arriva così all'equazione $324\,m^2 + 72\,m + 4 = 0$, da cui si ricava $m = -\frac{1}{9}$; la corrispondente equazione della retta tangente è $y = -\frac{1}{9}\,(x - 1) + 1$ ovvero $y = -\frac{1}{9}\,x + \frac{10}{9}$.

Esercizio 13. *Determina i valori di* k *per cui la retta* $y = x + k$ *è tangente all'ellisse* $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Soluzione. Riscritta l'equazione dell'ellisse nella forma $4\,x^2 + y^2 - 8 = 0$, basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} 4\,x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ y = x + k \end{cases}$$

abbia soluzioni coincidenti. Si arriva alla condizione $10 - k^2 = 0$, da cui ricaviamo $k_1 = \sqrt{10}$ e $k_2 = -\sqrt{10}$.

Esercizio 14. *Determina le coordinate dei punti di intersezione tra l'ellisse* $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ *e la circonferenza* $x^2 + y^2 = 3$.

Soluzione. Risolviamo il sistema $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - y^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 = 3 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{8}{3} \\ x^2 = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$;

i punti di intersezione, pertanto sono $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.