

5[^] Lezione

- Logaritmi .
- Proprietà dei logaritmi
- Equazioni logaritmiche .
- Disequazioni logaritmiche .
- Allegato Esercizi .

LOGARITMI:

Per logaritmo intendiamo una espressione letterale indicante un valore numerico.

Definizione : Si chiamerà logaritmo di un numero reale positivo b rispetto alla *base* a , positiva e diversa dall'unità, quel numero reale c dato come esponente alla *base* per ottenere il numero reale b .

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

dove con a indichiamo la **base** del logaritmo

dove con b indichiamo l'**argomento** del logaritmo

dove con c indichiamo il **valore** del logaritmo.

$$\text{Es : } \log_2 x = 3 \quad \longrightarrow 2^3 = x \quad , \quad x = 8$$

$$\log_x 4 = 2 \quad \longrightarrow x^2 = 4 \quad , \quad \begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = +2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ma poiché } x > 0 \\ \text{è l'unico valore accett.} \end{array}$$

$$\log_2 16 = x \quad \longrightarrow 2^x = 16$$

L'ultimo esempio fatto ci porta ad un nuovo tipo di equazione, detta eq. esponenziale.

Quindi avremo un dato assunto per ipotesi , e cioè la base sempre positiva, ma diversa da 1. Dovremo altresì esprimere di volta in volta quella che sarà la condizione di realtà di ogni logaritmo , **l'argomento strettamente positivo**.

$$\log_a b \longrightarrow \begin{cases} Hp \rightarrow a > 0, a \neq 1 \\ \text{Condizione di Esistenza} \rightarrow b > 0 \end{cases}$$

Nella maggior parte dei casi ci troveremo a lavorare con logaritmi di basi prefissate che nel nostro caso saranno :

la base dei logaritmi naturali , e , con e numero di Nepero ($e = 2,71\dots$)

la base dei logaritmi decimali , 10 .

I logaritmi naturali li indicheremo con il simbolo \ln , i decimali con \log .

Abbiamo detto che il valore della base di qualsiasi logaritmo viene assunta per ipotesi strettamente positiva , ma diversa da 1 ; questo evidentemente perché dalla definizione di logaritmo non esiste alcun valore dell'esponente c che dato alla base 1 permetta di avere un prefissato numero b .

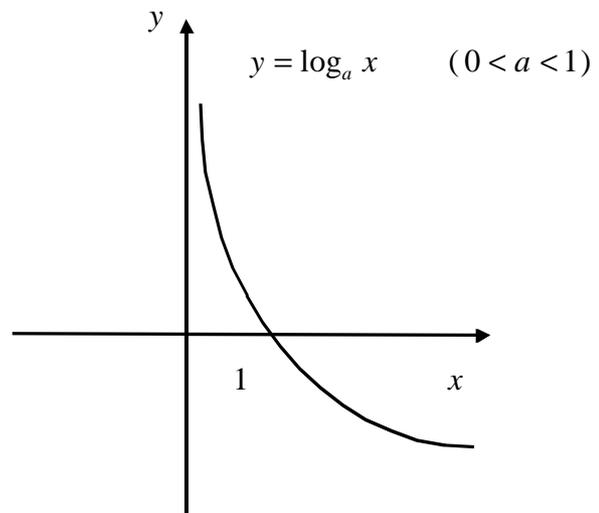
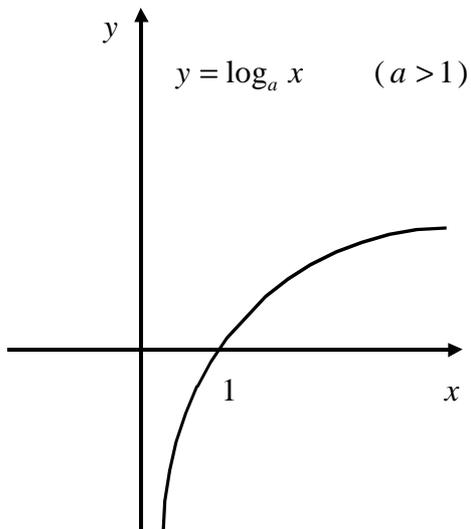
Infatti : $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

se consideriamo per es : $b = 5$, con $a = 1$ si avrebbe $1^c = 5$ e non esiste alcun valore di c che verifichi l'uguaglianza.

Se volessimo rappresentare in un riferimento cartesiano ortogonale la legge che lega ad ogni valore della variabile x , rappresentativa di tutti gli argomenti dei logaritmi, il corrispondente valore del logaritmo , espresso dalla variabile y troveremmo un diverso comportamento a seconda del valore assunto dalle basi.

Più precisamente :

$$y = \log_a x$$



PROPRIETA' DEI LOGARITMI

$$\log_a 1 = 0 \longrightarrow a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1 \longrightarrow a^1 = a$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a b$$

$$\log_a N = \frac{\log_x N}{\log_x a}$$

EQUAZIONI LOGARITMICHE :

Risolvere un'equazione logaritmica significa determinare quel particolare valore da attribuire alla variabile x affinché l'uguaglianza sia verificata.

Per arrivare a ciò, utilizzando le proprietà dei logaritmi, è indispensabile ricondursi all'uguaglianza di due membri che siano costituiti da un solo logaritmo, nella stessa base, con lo stesso coefficiente e dello stesso grado.

Nota Bene : Prima di risolvere qualsiasi esercizio relativo ai logaritmi è assolutamente indispensabile discutere la realtà dei singoli logaritmi, formulando così un sistema che risolto ci dà la condizione per la quale ha senso risolvere l'esercizio.

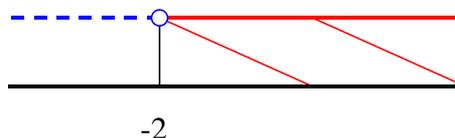
Per cui si avrà: $\log_a [A(x)] = \log_a [B(x)]$

condiz. di realtà $\longrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

eliminando i logaritmi $A(x) = B(x)$ che risolta darà le soluzioni.

Es: $\log(x+2) = 0$ cond. realtà $\longrightarrow (x+2 > 0)$

$x > -2$

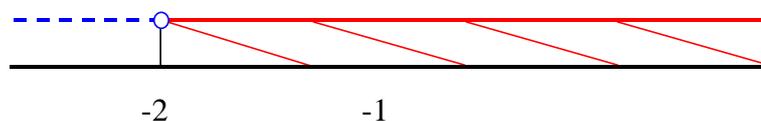


quindi le soluzioni finali della equazione saranno verificate se e solo se rientreranno nell'intervallo suddetto. Ricordiamo che la notazione \log ci indica un logaritmo decimale (in base 10).

Per cui riprendendo l'equazione avremo :

$$\log(x+2) = 0 \quad \text{che per le propr. dei logaritmi possiamo scrivere :}$$

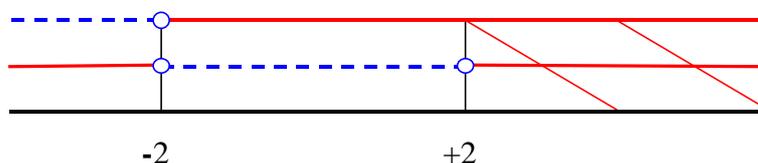
$$\log(x+2) = \log 1 \quad \text{di qui} \longrightarrow x+2 = 1 \quad \longrightarrow x = -1 \quad \text{che verifica.}$$



Infatti

$$\text{Es :} \quad \log(x^2 - 4) - \log(x+2) = 0$$

$$\text{condiz. di realt\`a} \quad \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x < -2, x > +2 \\ x > -2 \end{cases}$$



$$\text{risolvendo :} \quad \log(x^2 - 4) = \log(x+2)$$

$$(x^2 - 4) = (x + 2) \quad \longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} x_1 = +3 \longrightarrow \text{accett.} \\ x_2 = -2 \longrightarrow \text{non - accett.} \end{cases}$$

Potevamo risolvere anche così :

$$\log(x^2 - 4) - \log(x + 2) = 0$$

$$\log\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = \log 1$$

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} x_1 = +3 \Rightarrow \text{accett.} \\ x_2 = -2 \Rightarrow \text{non accett.} \end{cases}$$

Caso particolare :

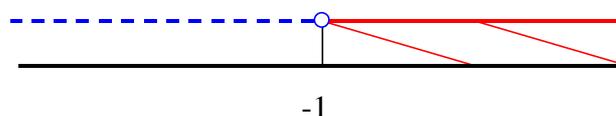
Si possono avere dei casi particolari nelle equazioni logaritmiche allorchè i gradi dei singoli logaritmi siano diversi tra loro.

Nella fattispecie sarà problematico riuscire a ricondursi ad avere due logaritmi nei rispettivi membri con le caratteristiche prima elencate ; per cui si procederà alla loro risoluzione tramite un metodo di sostituzione purchè i rispettivi argomenti siano tra loro uguali.

Es : $\log^2(x + 1) - 3\log(x + 1) + 2 = 0$

E' evidente che la prima operazione consiste nella condizione di realtà

$$x + 1 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > -1$$



si pone $\log(x + 1) = t$ da cui si ha :

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

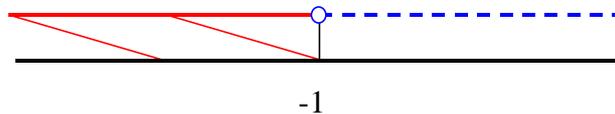
ora ricordando che : $\log(x+1) = t$ si ha :

$$\begin{aligned} \log(x+1) = 1 &\Rightarrow \log(x+1) = \log 10^1 \Rightarrow x_1 = 9 \\ \log(x+1) = 2 &\Rightarrow \log(x+1) = \log 10^2 \Rightarrow x_2 = 99 \end{aligned}$$

e quindi alla fine si verificherà la bontà dei risultati ottenuti.
Sia il valore di x_1 che quello di x_2 verificano la condizione di realtà.

Es : $\log^2(-x-2) - \log(-x-2) = 0$

$$-x-2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2$$



si pone $\log(-x-2) = t$ da cui si ha :

$$t^2 - t = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

da cui ricordando che : $\log(-x-2) = t$ si ha :

$$\begin{aligned} \log(-x-2) = 0 &\Rightarrow \log(-x-2) = \log 10^0 \Rightarrow x_1 = -3 \\ \log(-x-2) = 1 &\Rightarrow \log(-x-2) = \log 10^1 \Rightarrow x_2 = -12 \end{aligned}$$

che soddisfano entrambi la condizione di realtà.

Nota Bene : ricordiamo bene alcune distinzioni importanti

$$\begin{aligned} \log^2 x &= \log x \cdot \log x & \text{oppure} & \log^2 x = (\log x)^2 \\ \log x^2 &= 2 \log x & \text{oppure} & \log x^2 = \log(x \cdot x) \end{aligned}$$

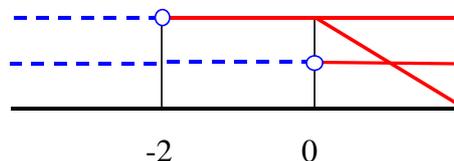
è quindi evidente che $\log^2 x \neq \log x^2$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE :

Si procederà al pari delle equazioni logaritmiche, ricordandoci che alla fine dell'esercizio metteremo a sistema l'insieme delle soluzioni trovate con la condizione di realtà iniziale.

Es : $2 \log x - 2 \log(x+2) > 0$

Condiz. di realtà $\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases}$

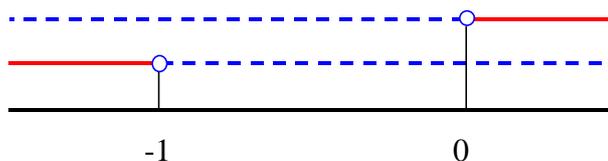


Applicando le proprietà dei logaritmi avremo :

$$2 \log x > 2 \log(x+2) \longrightarrow \log x^2 > \log(x+2)^2 \longrightarrow x^2 > (x+2)^2$$

da cui : $4x + 4 < 0 \longrightarrow x < -1$

Per cui sarà infine che :

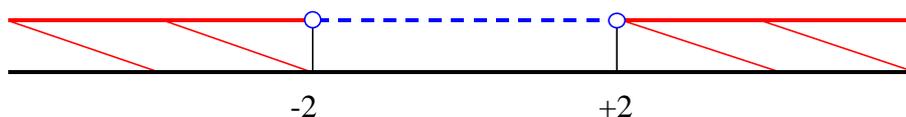


le soluzioni finali saranno : $\forall x \in \mathfrak{R}$.

Anche qui possiamo trovare il caso particolare :

Es: $3\log^2(x^2 - 4) - 4\log(x^2 - 4) + 1 \geq 0$

Condiz. di realtà: $x^2 - 4 > 0 \longrightarrow x < -2, x > +2$

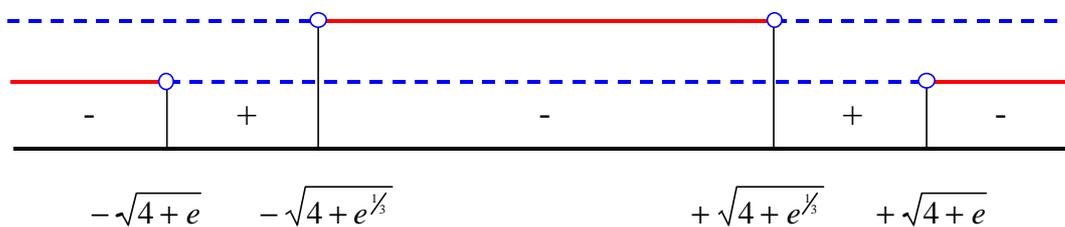


quindi ponendo $\log(x^2 - 4) = t$ si ha :

$$3t^2 - 4t + 1 \geq 0 \rightarrow t < \frac{1}{3}; t > 1 \quad \text{da cui:} \quad \begin{aligned} \log(x^2 - 4) < \frac{1}{3} &\longrightarrow (x^2 - 4) < e^{1/3} \\ \log(x^2 - 4) > 1 &\longrightarrow (x^2 - 4) > e \end{aligned}$$

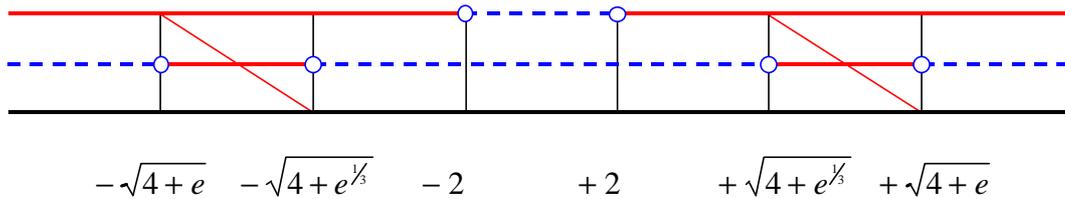
Si avrà quindi che :

$$\begin{cases} x^2 < 4 + e^{1/3} \Rightarrow -\sqrt{4 + e^{1/3}} < x < +\sqrt{4 + e^{1/3}} \\ x^2 > 4 + e \Rightarrow x < -\sqrt{4 + e}, \quad x > +\sqrt{4 + e} \end{cases}$$



per cui : $-\sqrt{4 + e} < x < -\sqrt{4 + e^{1/3}}, \quad +\sqrt{4 + e^{1/3}} < x < +\sqrt{4 + e}$

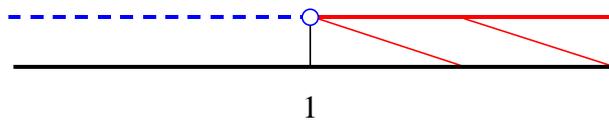
da confrontarsi infine con la condizione di realtà iniziale.



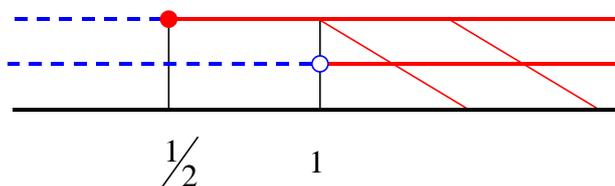
di qui si può notare l'insieme delle soluzioni che soddisfano la disequazione.

Nota Bene : in una disequazione logaritmica se si opera con logaritmi la cui base è minore di 1 al momento di eliminare i logaritmi stessi si procederà al cambio del verso della disequazione stessa.

Es : $2 \log_{1/2}(x-1) - \log_{1/2} x^2 \geq 0$ condiz. di real. $x > 1$



$$\log_{1/2}(x-1)^2 \geq \log_{1/2} x^2 \quad \longrightarrow (x-1)^2 \leq x^2 \quad \longrightarrow -2x+1 \leq 0 \quad \longrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



da cui avremo infine : $x > 1$

ESERCIZI SUL CALCOLO DEI LOGARITMI

ESERCIZI SUL CALCOLO DELLA BASE DEI LOGARITMI

ESERCIZI SULLA CONDIZIONE DI ESISTENZA DEI LOGARITMI

ESERCIZI SULLE SEMPLIFICAZIONI DEI LOGARITMI

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LOGARITMICHE

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1°E DI 2°GRADO

USO DEI PULSANTI

Visualizza solo la soluzione dell'esercizio

Visualizza le soluzioni di tutti gli esercizi

Nasconde le soluzioni

Torna all'indice degli esercizi

Torna all'indice della lezione

Calcolare i seguenti logaritmi :

1. $\log_2 \frac{1}{128}$

$$\log_2 \frac{1}{128} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2^7} \Rightarrow \log_2 2^{-7} \Rightarrow -7$$

2. $\log_4 \frac{1}{16}$

$$\log_4 \frac{1}{16} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{4^2} \Rightarrow \log_4 4^{-2} \Rightarrow -2$$

3. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243}$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^5} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow 5$$

4. $\log_{\frac{1}{4}} \frac{4}{64}$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{4}{64} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4^2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow 2$$

5. $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

$$\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3^3} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^3 \Rightarrow 3$$

6. $\log_{\sqrt{5}} 125$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} 5^3 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5})^2\right]^3 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^6 \Rightarrow 6$$

7. $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} 5^{-2} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5})^2 \right]^{-2} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^{-4} \Rightarrow -4$$

8. $\log_2 \sqrt[4]{2}$

$$\log_2 \sqrt[4]{2} \Rightarrow \log_2 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{1}{4}$$

9. $\log_{10} \frac{1}{100}$

$$\log_{10} \frac{1}{100} \Rightarrow \log_{10} 10^{-2} \Rightarrow -2$$

10. $\log_{16} 64$

$$\log_{16} 64 \Rightarrow \log_{16} 4^3 \Rightarrow \log_{16} (4^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log_{16} (16)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}$$

Calcolare la base dei seguenti logaritmi: (ricordando la definizione di logaritmo , e la positività della sua base) :

11. $\log_x 49 = 2$

$$\log_x 49 = 2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

12. $\log_x \frac{1}{81} = -4$

$$\log_x \frac{1}{81} = -4 \Rightarrow x^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow x^{-4} = \frac{1}{3^4} \Rightarrow x^{-4} = 3^{-4} \Rightarrow x = 3$$

13. $\log_x \frac{1}{64} = -2$

$$\log_x \frac{1}{64} = -2 \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{64} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{8^2} \Rightarrow x^{-2} = 8^{-2} \Rightarrow x = 8$$

14. $\log_x \frac{1}{8} = 3$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2^3} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

15. $\log_x \frac{1}{243} = 5$

$$\log_x \frac{1}{243} = 5 \Rightarrow x^5 = \frac{1}{243} \Rightarrow x^5 = \frac{1}{3^5} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

16. $\log_x 4\sqrt{2} = 5$

$$\log_x 4\sqrt{2} = 5 \Rightarrow x^5 = 4\sqrt{2} \Rightarrow x^5 = \sqrt{2^5} \Rightarrow x^5 = (\sqrt{2})^5 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

17. $\log_x 27 = 3$

$$\log_x 27 = 3 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x^3 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

18. $\log_x 64 = 3$

$$\log_x 64 = 3 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x^3 = 4^3 \Rightarrow x = 4$$

19. $\log_x 3\sqrt[3]{3} = \frac{4}{3}$

$$\log_x 3\sqrt[3]{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = 3$$

20. $\log_x 6 = 3$

$$\log_x 6 = 3 \Rightarrow x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$$

Stabilire le condizioni di esistenza (realtà) dei seguenti logaritmi:

21. $\log_{1/2}(-4-2x)$

$$\log_{1/2}(-4-2x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow -4-2x > 0 \Rightarrow x < -2$$

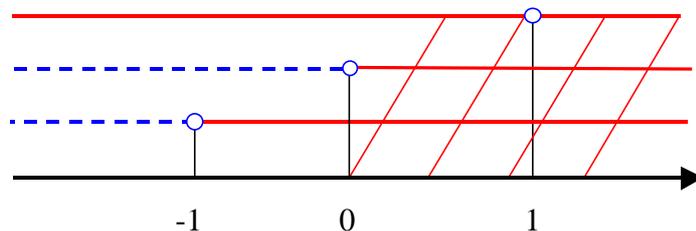
22. $\log_2(x^2 - 5x + 6)$

$$\log_2(x^2 - 5x + 6) \Rightarrow C.R. \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2, x > 3$$

23. $\log_x(3x+3)$

$$\log_x(3x+3) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 3x+3 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

da cui si ha :

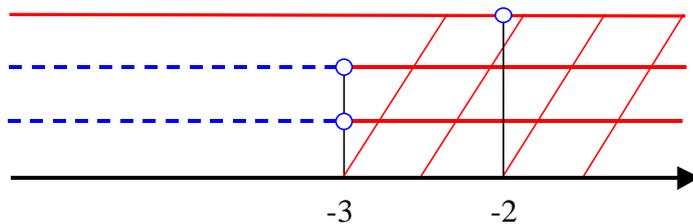


$$x > 0, \text{ con } x \neq 1$$

24. $\log_{x+3}(3x+9)$

$$\log_{x+3}(3x+9) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 3x+9 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x+3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

da cui si ha :



$$x > -3, \text{ con } x \neq -2$$

25. $\log_{\frac{3}{4}}(-5-4x)$

$$\log_{\frac{3}{4}}(-5-4x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow -5-4x > 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{4}$$

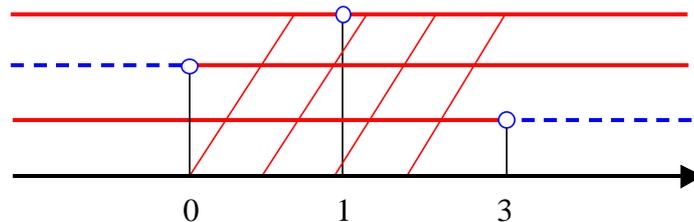
26. $\log_5(2x^2-5x-3)$

$$\log_5(2x^2-5x-3) \Rightarrow C.R. \Rightarrow 2x^2-5x-3 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}, x > 3$$

27. $\log_x(6-2x)$

$$\log_x(6-2x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 6-2x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

da cui si ha :

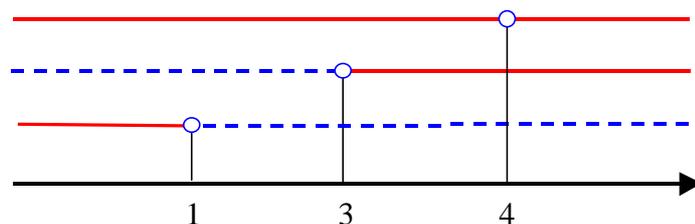


$$0 < x < 3, \text{ con } x \neq 1$$

28. $\log_{x-3}(2-2x)$

$$\log_{x-3}(2-2x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 2-2x > 0 \\ x-3 > 0 \\ x-3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

da cui si ha :



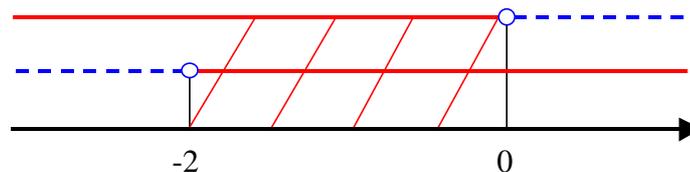
$$\forall x \in \mathfrak{R}$$

29. $\log_{-x}(2+x)$

$$\log_{-x}(2+x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 2+x > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < 0 \end{cases}$$

si noti come in questo caso non abbiamo posto la base diversa da 1 , in quanto (caso particolare)
per tale valore il logaritmo ammette valore reale .

da cui si ha :

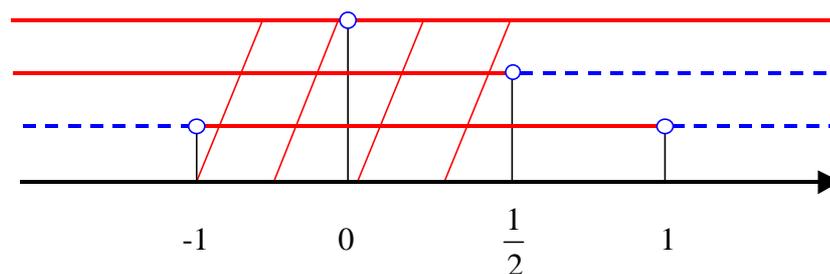


$$-2 < x < 0$$

30. $\log_{-2x+1}(2-2x^2)$

$$\log_{-2x+1}(2-2x^2) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 2-2x^2 > 0 \\ -2x+1 > 0 \\ -2x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

da cui si ha :



$$-1 < x < \frac{1}{2} , \text{ con } x \neq 0$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi semplificare :

31. $\log_a 2b + 2\log_a b$

$$\log_a 2b + 2\log_a b \Rightarrow \log_a 2b + \log_a b^2 \Rightarrow \log_a 2b^3$$

32. $2\log_a x - \log_a 3x + 4\log_a x^2$

$$2\log_a x - \log_a 3x + 4\log_a x^2 \Rightarrow \log_a x^2 - \log_a 3x + \log_a x^8 \Rightarrow \log_a \frac{x^2}{3x} + \log_a x^8 \Rightarrow \log_a \frac{x^9}{3}$$

33. $\log_b c - \log_b ac^2 + \log_b a$

$$\log_b c - \log_b ac^2 + \log_b a \Rightarrow \log_b \frac{c}{ac^2} + \log_b a \Rightarrow \log_a \frac{ac}{ac^2} \Rightarrow \log_a \frac{1}{c}$$

34. $4\log_a d - \frac{1}{4}\log_a d^2 y$

$$4\log_a d - \frac{1}{4}\log_a d^2 y \Rightarrow \log_a d^4 - \log_a (d^2 y)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \log_a \frac{d^4}{\sqrt[4]{d^2 y}}$$

35. $2\log_n a + 3\log_n c - \log_n n^2 + 2\log_n n$

$$2\log_n a + 3\log_n c - \log_n n^2 + 2\log_n n \Rightarrow \log_n a^2 + \log_n c^3 - \log_n n^2 + \log_n n^2 \Rightarrow \log_n a^2 c^3$$

36. $2\log_c d^3 + \frac{1}{2}\log_c a - \log_c ab + \frac{1}{3}\log_c 2n$

$$2\log_c d^3 + \frac{1}{2}\log_c a - \log_c ab + \frac{1}{3}\log_c 2n \Rightarrow \log_c d^6 + \log_c \sqrt{a} - \log_c ab + \log_c \sqrt[3]{2n}$$

$$\Rightarrow \log_c d^6 \sqrt{a} - \log_c ab + \log_c \sqrt[3]{2n} \Rightarrow \log_c \frac{d^6 \sqrt{a}}{ab} + \log_c \sqrt[3]{2n} \Rightarrow \log_c \frac{d^6 \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{2n}}{ab}$$

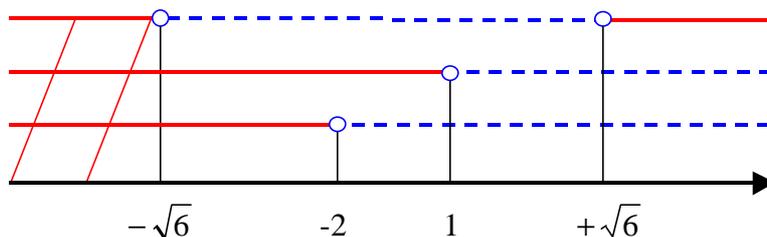
$$\Rightarrow \log_c \frac{d^6 \sqrt[6]{4a^3 n^2}}{ab}$$

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

37. $\log(-x-2) + \log(1-x) = \log 1 + \log(x^2-6)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} -x-2 > 0 \\ 1-x > 0 \\ x^2-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ x < -\sqrt{6} , x > +\sqrt{6} \end{cases}$

e quindi :



$$x < -\sqrt{6}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(-x-2) + \log(1-x) = \log 1 + \log(x^2-6)$$

$$\Rightarrow \log[(-x-2)(1-x)] = \log(x^2-6)$$

$$\Rightarrow (-x-2)(1-x) = x^2-6$$

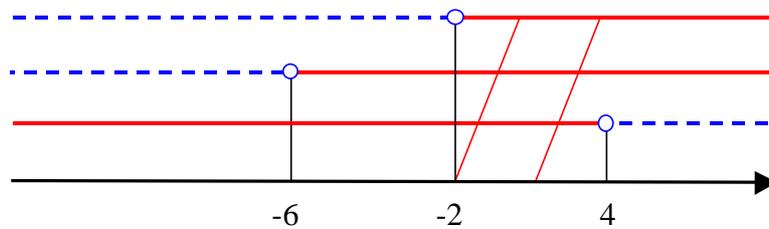
$$\Rightarrow x^2 - x - 2 + 2x = x^2 - 6 \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

che quindi , rispettando la condizione di realtà , è la soluzione dell'equazione .

38. $\log(4-x) = \log(x+6) + 2\log(x+2)$

$$\text{Condizione di realt\`a : } \begin{cases} 4-x > 0 \\ x+6 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -6 \\ x > -2 \end{cases}$$

e quindi :



$$-2 < x < 4$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(4-x) = \log(x+6) + 2\log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log(4-x) = \log[(x+6)(x+2)]$$

$$\Rightarrow (4-x) = (x+6)(x+2)$$

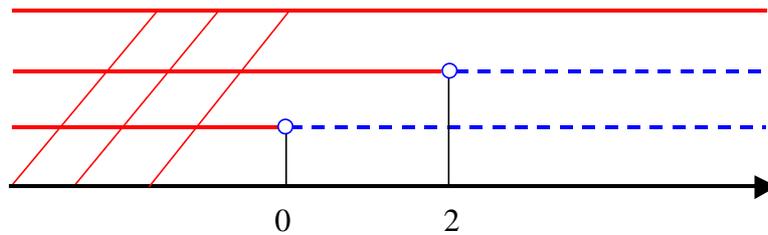
$$\Rightarrow 4-x = x^2 + 2x + 6x + 12 \Rightarrow x^2 + 9x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

e per la condizione di realt\`a, la soluzione \`e $x = -1$.

39. $\log(-x) + \log(2-x) + \log(4) = \log(10x^2 + 2)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} -x > 0 \\ 2-x > 0 \\ 10x^2+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 2 \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

e quindi :



$x < 0$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(-x) + \log(2-x) + \log 4 = \log(10x^2 + 2)$$

$$\Rightarrow \log[4(-x)(2-x)] = \log(10x^2 + 2)$$

$$\Rightarrow -8x + 4x^2 = 10x^2 + 2$$

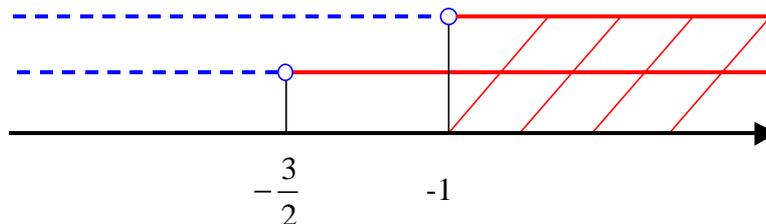
$$\Rightarrow 6x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{3} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

che quindi , rispettando la condizione di realtà , sono soluzioni dell'equazione .

40. $2 \log(2x+3) = \log(x+1)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > -1 \end{cases}$

e quindi :



$x > -1$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$2 \log(2x+3) = \log(x+1)$

$\Rightarrow \log(2x+3)^2 = \log(x+1)$

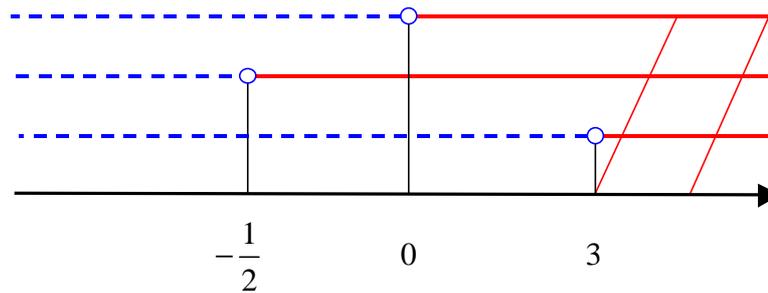
$\Rightarrow (2x+3)^2 = x+1$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = x + 1 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = -7 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

41. $\log(x-3) = 2 \log(2x+1) - \log(2x)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$

e quindi :



$$x > 3$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(x-3) = 2\log(2x+1) - \log(2x)$$

$$\Rightarrow \log(x-3) = \log(2x+1)^2 - \log(2x)$$

$$\Rightarrow x-3 = \frac{(2x+1)^2}{2x} \Rightarrow \frac{2x(x-3)}{2x} = \frac{(2x+1)^2}{2x}$$

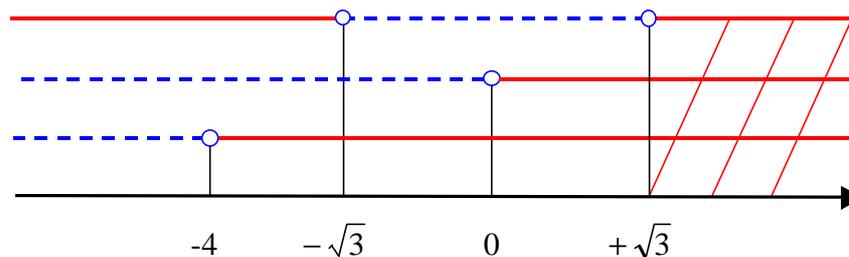
$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{23}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-5 - \sqrt{23}}{2} \\ x_2 = \frac{-5 + \sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

che quindi , non rispettando la condizione di realtà , non sono soluzioni dell'equazione . $\forall x \in \mathfrak{R}$

$$42. \quad \log(x+4) - \log(x) = \log(3) + \log(x^2 - 3)$$

$$\text{Condizione di realt\`a : } \begin{cases} x+4 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 0 \\ x < -\sqrt{3} \text{ , } x > +\sqrt{3} \end{cases}$$

e quindi :



$$x > +\sqrt{3}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(x+4) - \log(x) = \log(3) + \log(x^2 - 3)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x+4}{x}\right) = \log 3(x^2 - 3)$$

$$\Rightarrow \frac{x+4}{x} = 3x^2 - 9 \Rightarrow \frac{x+4}{x} = \frac{3x^3 - 9x}{x}$$

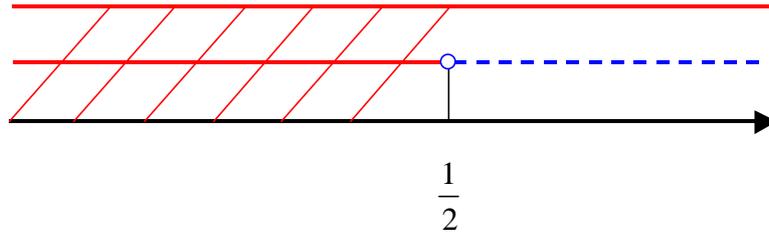
$$\Rightarrow 3x^3 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(3x^2 + 6x + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ x_1 = 2 \text{ , } x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \right\}$$

e per la condizione di realt\`a, la soluzione dell'equazione $x = 2$.

$$43. \quad 2 \log(-2x+1) = \log(8x^2 + 1)$$

$$\text{Condizione di realtà : } \begin{cases} -2x+1 > 0 \\ 8x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

e quindi :



$$x < \frac{1}{2}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$2 \log(-2x+1) = \log(8x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \log(-2x+1)^2 = \log(8x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (-2x+1)^2 = 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 8x^2 + 1 \Rightarrow 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

che per la condizione di realtà, sono soluzioni dell'equazione .

44. $\log^2(x+4) - 3\log(x+4) = \log_2 16$

Condizione di realtà : $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$ e posto $\log(x+4)=t$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

e risostituendo $\log(x+4)=t$:

$$\log(x+4) = -1$$

e ricordando che : $n = \log_a a^n \Rightarrow$

$$\log(x+4) = \log 10^{-1}$$

$$\log(x+4) = 4$$

$$\log(x+4) = \log 10^4$$

$$(x+4) = 10^{-1} \Rightarrow x = 10^{-1} - 4$$

da cui :

$$(x+4) = 10^4 \Rightarrow x = 10^4 - 4$$

che per la condizione di realtà sono soluzioni dell'equazione .

45. $2\log^3(x-1) - [\log(x-1)]^2 = 0$

Condizione di realtà : $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ e posto $\log(x-1)=t$:

$$2t^3 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2(2t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_{1/2} = 0 \\ t_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e risostituendo $\log(x-1)=t$:

$$\log(x-1) = 0$$

e ricordando che : $n = \log_a a^n \Rightarrow$

$$\log(x-1) = \log 10^0$$

$$\log(x-1) = \frac{1}{2}$$

$$\log(x-1) = \log 10^{\frac{1}{2}}$$

$$(x-1) = 1 \Rightarrow x = 2$$

da cui :

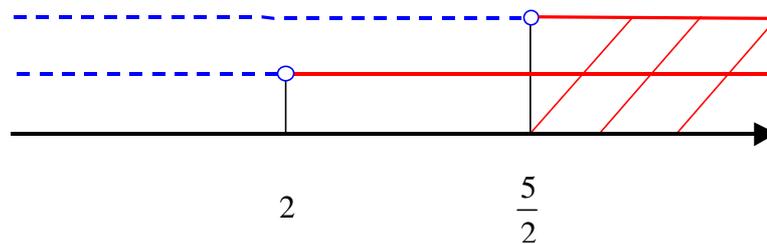
$$(x-1) = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{10} + 1$$

che per la condizione di realtà sono soluzioni dell'equazione .

$$46. \quad \log_3(x-2) + \log_3(2x-5) = \frac{1}{4} \log_3 1$$

$$\text{Condizione di realtà : } \begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

e quindi :



$$x < \frac{5}{2}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_3(x-2) + \log_3(2x-5) = \frac{1}{4} \log_3 1$$

$$\Rightarrow \log_3[(x-2)(2x-5)] = \log_3 1$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-5) = 1$$

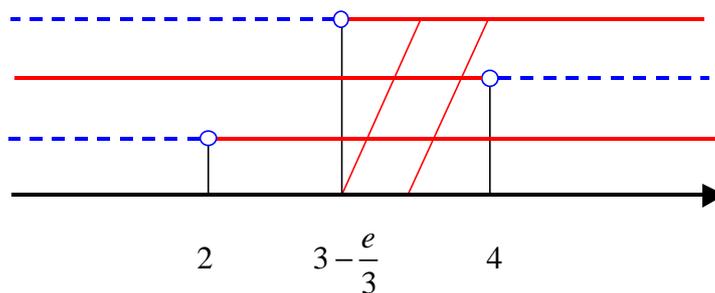
$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 4x + 10 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

e per la condizione di realtà, $x = 3$ è la soluzione dell'equazione .

47. $\ln(x-2) - \ln(4-x) = \ln e - \ln(3x-9+e)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 4-x > 0 \\ 3x-9+e > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 4 \\ x > \frac{9-e}{3} \quad (x > 3 - \frac{e}{3}) \end{cases}$

e quindi :



$$3 - \frac{e}{3} < x < 4$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\ln(x-2) - \ln(4-x) = \ln e - \ln(3x-9+e)$$

$$\Rightarrow \ln(x-2) + \ln(3x-9+e) = \ln e + \ln(4-x)$$

$$\Rightarrow \ln[(x-2)(3x-9+e)] = \ln[e(4-x)] \Rightarrow (x-2)(3x-9+e) = e(4-x)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x + ex - 6x + 18 - 2e = 4e - ex \Rightarrow 3x^2 + 2ex - 15x + 18 - 6e = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + (2e-15)x + 6(3-e) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{(2e-15)^2 - 72(3-e)}}{6} =$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{4e^2 - 60e + 225 - 216 + 72e}}{6} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{4e^2 + 12e + 9}}{6} =$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{(2e+3)^2}}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{(15-2e) + (2e+3)}{6} = 3 \\ x_2 = \frac{(15-2e) - (2e+3)}{6} = \frac{2(3-e)}{3} \end{cases}$$

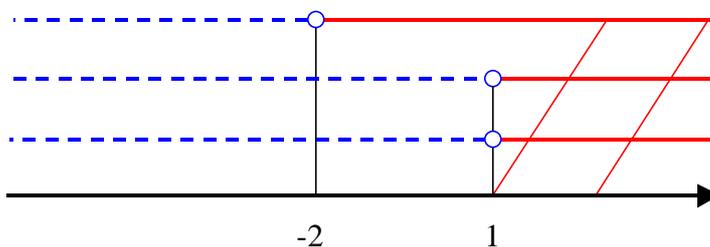
e per la condizione di realtà, la soluzione dell'equazione $x = 3$.

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

48. $\log(2x-2) + \log(x-1) < \log(x+2)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} 2x-2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1 \\ x > -2 \end{cases}$

e quindi :



$x > 1$

Riprendendo la disequazione di partenza :

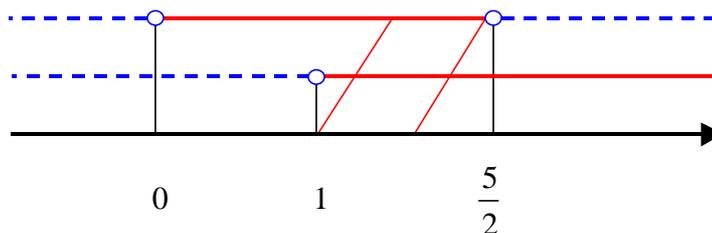
$\log(2x-2) + \log(x-1) < \log(x+2)$

$\Rightarrow \log[(2x-2)(x-1)] < \log(x+2)$

$\Rightarrow (2x-2)(x-1) < x+2$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 2x + 2 < x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$

per arrivare infine ad avere :

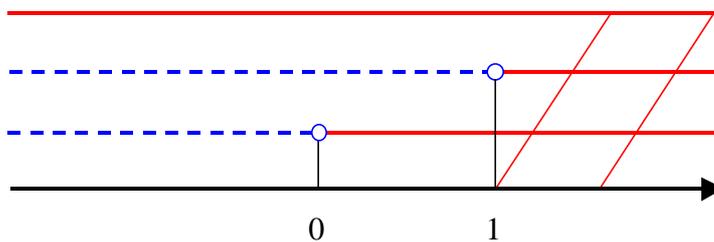


$1 < x < \frac{5}{2}$ soluzione della disequazione .

49. $\log x + \log(x-1) < \log(x^2 + 5)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x^2+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

e quindi :



$x > 1$

Riprendendo la disequazione di partenza :

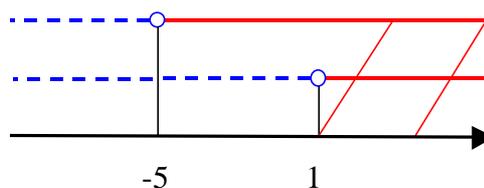
$\log x + \log(x-1) < \log(x^2 + 5)$

$\Rightarrow \log[x(x-1)] < \log(x^2 + 5)$

$\Rightarrow x(x-1) < x^2 + 5$

$\Rightarrow x^2 - x < x^2 + 5 \Rightarrow x > -5$

per arrivare infine ad avere :

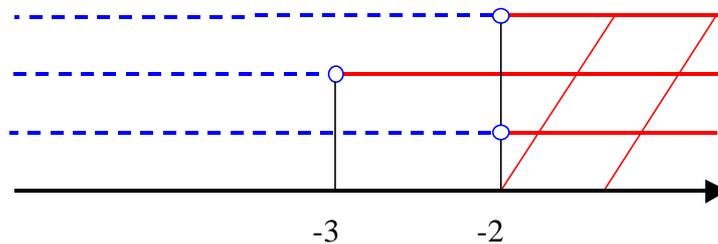


$x > 1$ soluzione della disequazione .

50. $\log(2+x) + \log(3+x) > \log 10 + \log(x+2)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} 2+x > 0 \\ 3+x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \\ x > -2 \end{cases}$

e quindi :



$$x > -2$$

Riprendendo la disequazione di partenza :

$$\log(2+x) + \log(3+x) > \log 10 + \log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log[(2+x)(3+x)] > \log[10(x^2+5)]$$

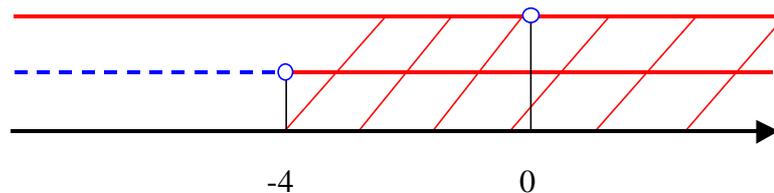
$$\Rightarrow (2+x)(3+x) > 10(x^2+5)$$

$$\Rightarrow 6+2x+3x+x^2 > 10x^2+50 \Rightarrow 9x^2-5x+44 < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$$

51. $2 \log(x+4) + \log 3 > \log(3x^2)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} x+4 > 0 \\ 3x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$

e quindi :



$x > -4$, $x \neq 0$

Riprendendo l'equazione di partenza :

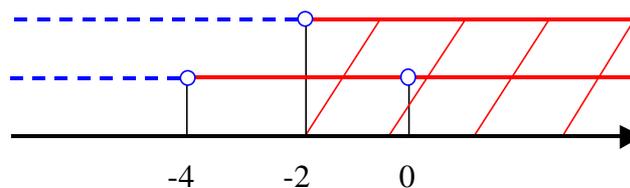
$2 \log(x+4) + \log 3 > \log(3x^2)$

$\Rightarrow \log[3(x+4)^2] > \log(3x^2)$

$\Rightarrow 3(x+4)^2 > 3x^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 24x + 48 > 3x^2 \Rightarrow 24x + 48 > 0 \Rightarrow x > -2$

per arrivare infine ad avere :

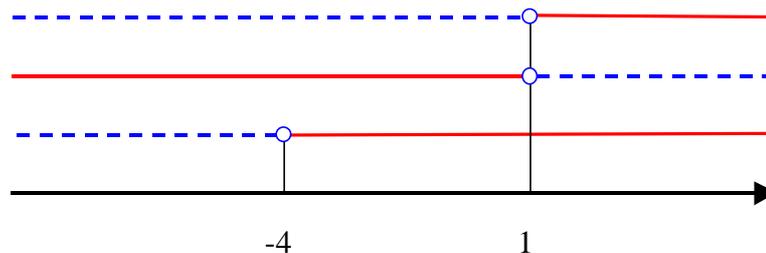


$x > -2$, $x \neq 0$ soluzione della disequazione .

52. $\log(2 - 2x) > \log(x + 4) + \log(x - 1)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} 2 - 2x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -4 \\ x > 1 \end{cases}$

e quindi :



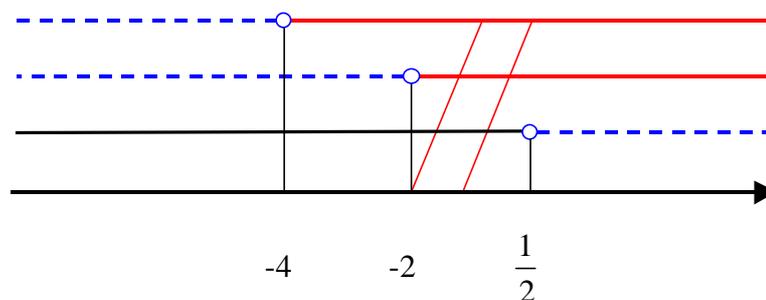
$\forall x \in \mathfrak{R}$

e quindi non essendoci valori reali che soddisfano la condizione di realtà, la disequazione non ammette soluzioni.

53. $\ln(2 - 4x) + \ln(2 + x) < \ln(x + 4)$

Condizione di realtà : $\begin{cases} 2 - 4x > 0 \\ 2 + x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -2 \\ x > -4 \end{cases}$

e quindi :



$-2 < x < \frac{1}{2}$

Riprendendo l'equazione di partenza :

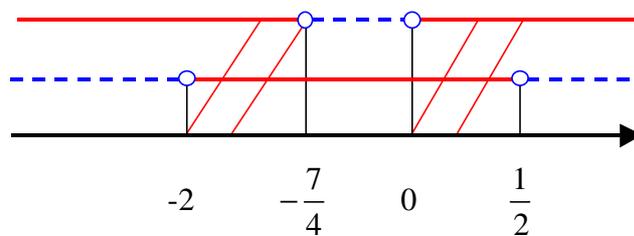
$$\ln(2-4x) + \ln(2+x) < \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow \ln[(2-4x)(2+x)] < \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow (2-4x)(2+x) < x+4$$

$$\Rightarrow 4+2x-8x-4x^2 < x+4 \Rightarrow 4x^2+7x > 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{4}, \quad x > 0$$

per arrivare infine ad avere :

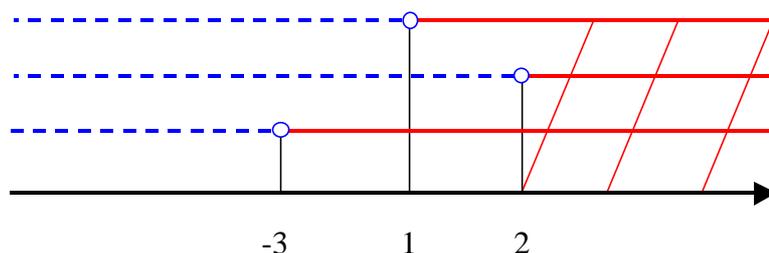


$$-2 < x < -\frac{7}{4}, \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{soluzione della disequazione.}$$

54. $\log_{0,1}(2x+6) + \log_{0,1}(2x-4) > 2\log_{0,1}(x-1)$

$$\text{Condizione di realt\`a : } \begin{cases} 2x+6 > 0 \\ 2x-4 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

e quindi :



$$x > 2$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_{0,1}(2x+6) + \log_{0,1}(2x-4) > 2\log_{0,1}(x-1)$$

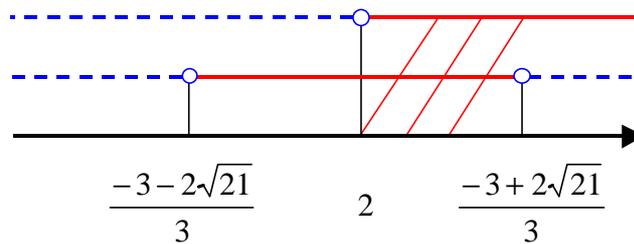
$$\Rightarrow \log_{0,1}[(2x+6)(2x-4)] > \log_{0,1}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow (2x+6)(2x-4) < (x-1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 12x - 24 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 25 < 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 84 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3-2\sqrt{21}}{3} < x < \frac{-3+2\sqrt{21}}{3}$$

per arrivare infine ad avere :



$$2 < x < \frac{-3+2\sqrt{21}}{3} \quad \text{soluzione della disequazione.}$$

55. $\log_3(x^2+3) - \log_3(x^2+1) \geq \log_3 2 - \log_3 8$

Condizione di realtà : $\begin{cases} x^2+3 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathfrak{R} \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

e quindi : $\forall x \in \mathfrak{R}$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_3(x^2 + 3) - \log_3(x^2 + 1) \geq \log_3 2 - \log_3 8$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2 + 3) + \log_3 8 > \log_3 2 + \log_3(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 8(x^2 + 3) > 2(x - 1)^2$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 24 > 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow 6x^2 + 4x + 22 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = -128 < 0$$

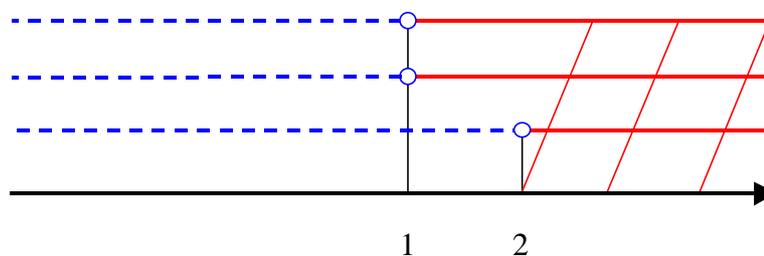
$$\Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$$

$\forall x \in \mathfrak{R}$ soluzione della disequazione .

56. $\log_{0,3}(x - 2) + \log_{0,3}(2x - 2) - \log_{0,3}(3x - 3) < \log_{0,3} 5$

Condizione di realtà : $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 2 > 0 \\ 3x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 1 \\ x > 1 \end{cases}$

e quindi :



$$x > 2$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_{0,3}(x-2) + \log_{0,3}(2x-2) - \log_{0,3}(3x-3) < \log_{0,3} 5$$

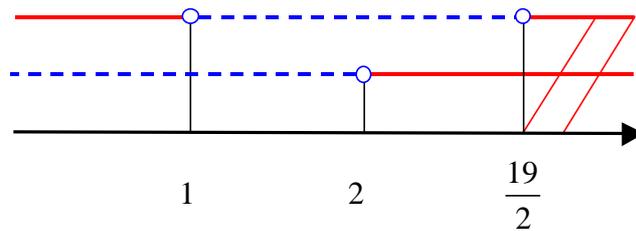
$$\Rightarrow \log_{0,3}[(x-2)(2x-2)] < \log_{0,3}(3x-3) + \log_{0,3} 5$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-2) > 5(3x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4x + 4 > 15x - 15 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 19 > 0 \Rightarrow \Delta = 289 > 0$$

$$\Rightarrow x < 1, \quad x > \frac{19}{2}$$

per arrivare infine ad avere :

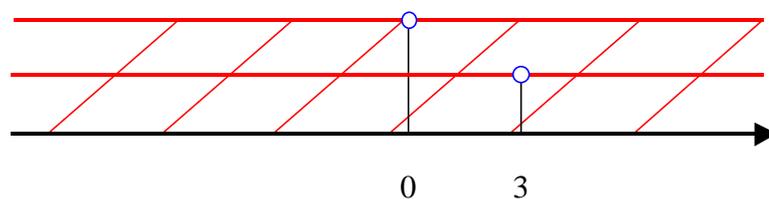


$$x > \frac{19}{2} \quad \text{soluzione della disequazione .}$$

57. $\log(x^2 - 6x + 9) > \log x^2 - \log 3$

$$\text{Condizione di realt\`a : } \begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

e quindi :



$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

Riprendendo l'equazione di partenza : $\log(x^2 - 6x + 9) > \log x^2 - \log 3$

$$\log(x^2 - 6x + 9) > \log x^2 - \log 3$$

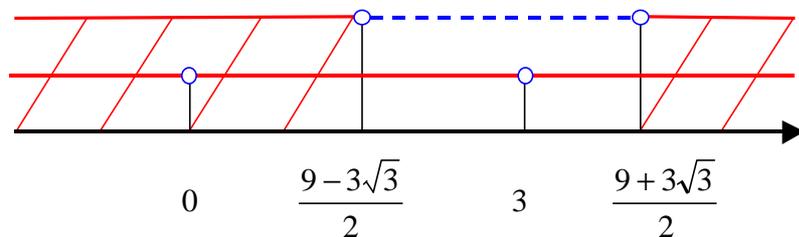
$$\Rightarrow \log[3(x^2 - 6x + 9)] > \log x^2$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 6x + 9) > x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 27 > x^2 \Rightarrow 2x^2 - 18x + 27 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 27 > 0$$

$$\Rightarrow x < \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}, \quad x > \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$$

per arrivare infine ad avere :



$$x < \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}, \quad x \neq 0, \quad x > \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2} \quad \text{soluzione della disequazione.}$$