# 5^ Lezione

- Logaritmi .
- Proprietà dei logaritmi
- Equazioni logaritmiche .
- Disequazioni logaritmiche .
- Allegato Esercizi .

**LOGARITMI** :

Per logaritmo intendiamo una espressione letterale indicante un valore numerico.

**Definizione** : Si chiamerà logaritmo di un numero reale positivo *b* rispetto alla *base a*, positiva e diversa dall'unità, quel numero reale *c* dato come esponente alla *base* per ottenere il numero reale *b*.

$$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$$

dove con *a* indichiamo la **base** del logaritmo

dove con *b* indichiamo l'**argomento** del logaritmo

dove con *c* indichiamo il **valore** del logaritmo.

Es : $\log_2 x = 3 \longrightarrow 2^3 = x$ , $x = 8$

$\log_x 4 = 2 \longrightarrow x^2 = 4$ , $x = \pm 2$ ma poiché $x > 0$
$x = +2$ è l'unico valore accett.

$\log_2 16 = x \longrightarrow 2^x = 16$

L'ultimo esempio fatto ci porta ad un nuovo tipo di equazione, detta eq. esponenziale.

Quindi avremo un dato assunto per ipotesi , e cioè la base sempre positiva, ma diversa da 1. Dovremo altresì esprimere di volta in volta quella che sarà la condizione di realtà di ogni logaritmo , **l'argomento strettamente positivo**.

$$\log_a b \longrightarrow \begin{cases} Hp \rightarrow a > o \quad , \quad a \neq 1 \\ Condizione\, di\ Esistenza \quad \rightarrow \quad b > 0 \end{cases}$$

Nella maggior parte dei casi ci troveremo a lavorare con logaritmi di basi prefissate che nel nostro caso saranno :

la base dei <u>logaritmi naturali</u> , $e$ , con $e$ numero di Nepero ( e = 2,71...)

la base dei <u>logaritmi decimali</u> , 10 .

I logaritmi naturali li indicheremo con il simbolo $\boxed{\ln}$ , i decimali con $\boxed{\log}$ .

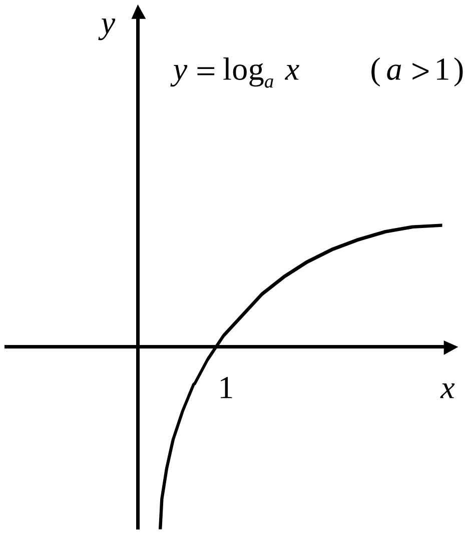
Abbiamo detto che il valore della base di qualsiasi logaritmo viene assunta per ipotesi strettamente positiva , ma diversa da 1 ; questo evidentemente perché dalla definizione di logaritmo non esiste alcun valore dell'esponente $c$ che dato alla base 1 permetta di avere un prefissato numero $b$.

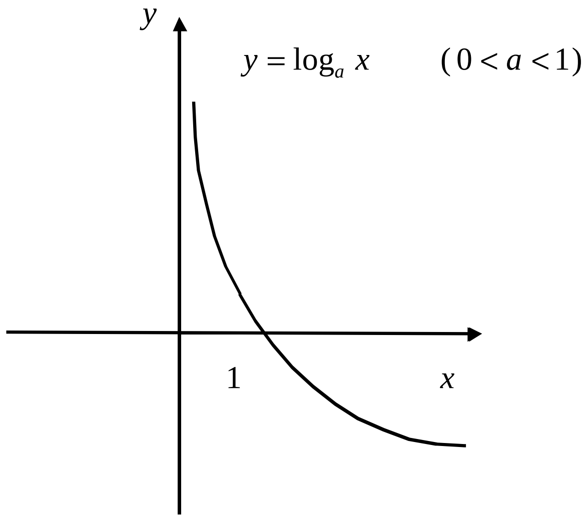
Infatti : $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

se consideriamo per es : $b = 5$ , con $a = 1$ si avrebbe $1^c = 5$ e non esiste alcun valore di c che verifichi l'uguaglianza.

Se volessimo rappresentare in un riferimento cartesiano ortogonale la legge che lega ad ogni valore della variabile $x$ , rappresentativa di tutti gli argomenti dei logaritmi, il corrispondente valore del logaritmo , espresso dalla variabile $y$ troveremmo un diverso comportamento a seconda del valore assunto dalle basi.

Più precisamente : $\boxed{y = \log_a x}$




**PROPRIETA' DEI LOGARITMI**

$$\log_a 1 = 0 \longrightarrow a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1 \longrightarrow a^1 = a$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a b$$

$$\log_a N = \frac{\log_x N}{\log_x a}$$

**EQUAZIONI LOGARITMICHE** :

Risolvere un'equazione logaritmica significa determinare quel particolare valore da attribuire alla variabile $x$ affinché l'uguaglianza sia verificata.

Per arrivare a ciò, utilizzando le proprietà dei logaritmi, è indispensabile ricondursi all'uguaglianza di due membri che siano costituiti da un solo logaritmo, nella stessa base, con lo stesso coefficiente e dello stesso grado.

**Nota Bene :** Prima di risolvere qualsiasi esercizio relativo ai logaritmi è assolutamente indispensabile discutere la realtà dei singoli logaritmi, formulando così un sistema che risolto ci dà la condizione per la quale ha senso risolvere l'esercizio.

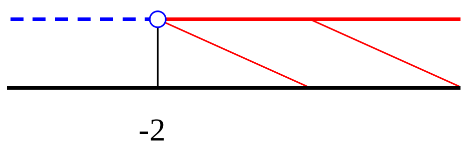
Per cui si avrà: $\log_a[A(x)] = \log_a[B(x)]$

condiz. di realtà $\longrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

eliminando i logaritmi $A(x) = B(x)$ che risolta darà le soluzioni.

Es : $\log(x+2) = 0$ cond. realtà $\longrightarrow (x+2>0)$

$x > -2$

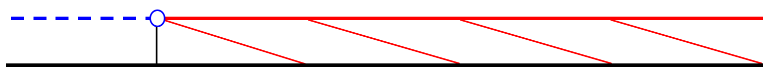



quindi le soluzioni finali della equazione saranno verificate se e solo se rientreranno nell'intervallo suddetto. Ricordiamo che la notazione log ci indica un logaritmo decimale (in base 10).

Per cui riprendendo l'equazione avremo :

$\log(x+2)=0$ che per le propr. dei logaritmi possiamo scrivere :

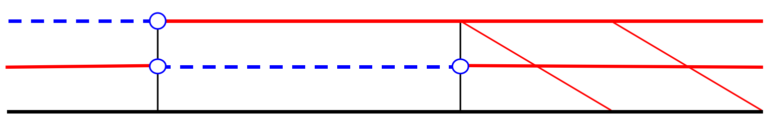
$\log(x+2)=\log 1$ di qui $\longrightarrow x+2=1 \longrightarrow x=-1$ che verifica.




Infatti

Es : $\log(x^2-4)-\log(x+2)=0$

condiz. di realtà $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x+2>0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x<-2 \ , \ x>+2 \\ x>-2 \end{cases}$




risolvendo : $\log(x^2-4)=\log(x+2)$

$(x^2-4)=(x+2) \longrightarrow x^2-x-6=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=+3 \longrightarrow accett. \\ x_2=-2 \longrightarrow non-accett. \end{cases}$

Potevamo risolvere anche così :

$$\log\left(x^2-4\right)-\log(x+2)=0$$

$$\log\frac{\left(x^2-4\right)}{(x+2)}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \log\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)=\log 1$$

$$\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)=1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2-x-6}{x+2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2-x-6=0$$

$$\text{da cui} \quad \begin{cases} x_1=+3 & \Rightarrow \quad \textit{accett.} \\ x_2=-2 & \Rightarrow \quad \textit{non accett.} \end{cases}$$

**<u>Caso particolare</u>** :

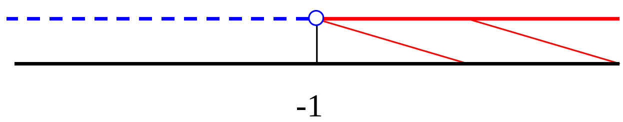
Si possono avere dei casi particolari nelle equazioni logaritmiche allorchè i gradi dei singoli logaritmi siano diversi tra loro.

Nella fattispecie sarà problematico riuscire a ricondursi ad avere due logaritmi nei rispettivi membri con le caratteristiche prima elencate ; per cui si procederà alla loro risoluzione tramite un metodo di sostituzione purchè i rispettivi argomenti siano tra loro uguali.

Es : $$\log^2(x+1)-3\log(x+1)+2=0$$

E' evidente che la prima operazione consiste nella condizione di realtà

$x+1>0 \longrightarrow x>-1$




si pone $\log(x+1)=t$ da cui si ha :

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

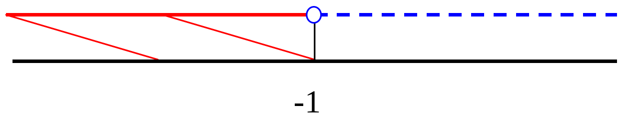
ora ricordando che: $\log(x+1) = t$ si ha:

$$\log(x+1) = 1 \Rightarrow \log(x+1) = \log 10^1 \Rightarrow x_1 = 9$$
$$\log(x+1) = 2 \Rightarrow \log(x+1) = \log 10^2 \Rightarrow x_2 = 99$$

e quindi alla fine si verificherà la bontà dei risultati ottenuti.
Sia il valore di $x_1$ che quello di $x_2$ verificano la condizione di realtà.

Es: $$\log^2(-x-2) - \log(-x-2) = 0$$

$-x-2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2$




si pone $\log(-x-2) = t$ da cui si ha:

$$t^2 - t = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

da cui ricordando che: $\log(-x-2) = t$ si ha:

$$\log(-x-2) = 0 \Rightarrow \log(-x-2) = \log 10^0 \Rightarrow x_1 = -3$$
$$\log(-x-2) = 1 \Rightarrow \log(-x-2) = \log 10^1 \Rightarrow x_2 = -12$$

che soddisfano entrambi la condizione di realtà.

**Nota Bene** : ricordiamo bene alcune distinzioni importanti

$\log^2 x = \log x \cdot \log x$ *oppure* $\log^2 x = (\log x)^2$

$\log x^2 = 2\log x$ *oppure* $\log x^2 = \log(x \cdot x)$

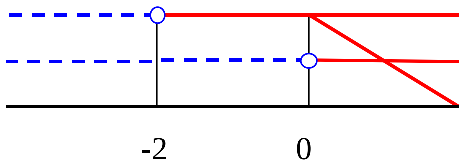
è quindi evidente che $\log^2 x \neq \log x^2$

**<u>DISEQUAZIONI LOGARITMICHE</u>** :

Si procederà al pari delle equazioni logaritmiche , ricordandoci che alla fine dell'esercizio metteremo a sistema l'insieme delle soluzioni trovate con la condizione di realtà iniziale.

Es : $2\log x - 2\log(x+2) > 0$

Condiz. di realtà $\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases}$

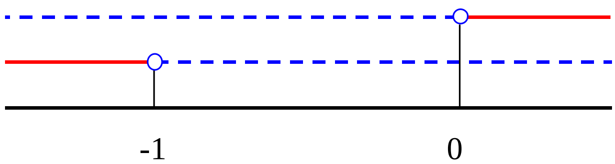



Applicando le proprietà dei logaritmi avremo :

$2\log x > 2\log(x+2) \longrightarrow \log x^2 > \log(x+2)^2 \longrightarrow x^2 > (x+2)^2$

da cui : $4x + 4 < 0 \longrightarrow x < -1$

Per cui sarà infine che :

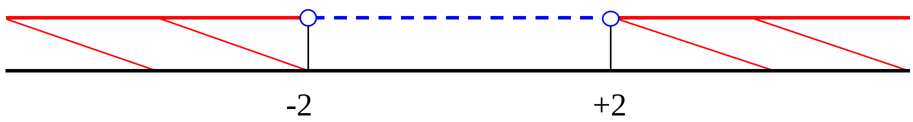



le soluzioni finali saranno : $\not\forall x \in \Re$ .

Anche qui possiamo trovare il <u>caso particolare</u> :

Es : $3\log^2\left(x^2-4\right)-4\log\left(x^2-4\right)+1\geq 0$

Condiz. di realtà: $x^2-4>0 \longrightarrow x<-2 \;,\; x>+2$



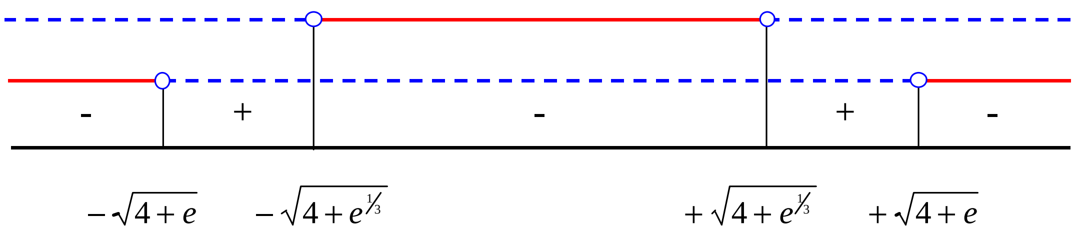

quindi ponendo $\log\left(x^2-4\right)=t$ si ha :

$3t^2-4t+1\geq 0 \quad \rightarrow \quad t<\frac{1}{3};t>1$ da cui : $\log\left(x^2-4\right)<\frac{1}{3}\longrightarrow\left(x^2-4\right)<e^{1/3}$

$\log\left(x^2-4\right)>1\longrightarrow\left(x^2-4\right)>e$

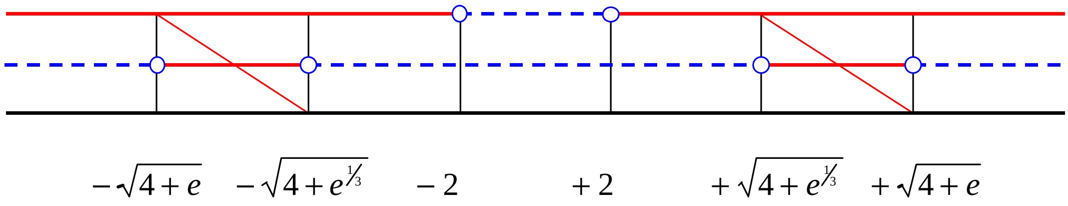
Si avrà quindi che :

$$\begin{cases} x^2<4+e^{1/3} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{4+e^{1/3}}<x<+\sqrt{4+e^{1/3}} \\ x^2>4+e \quad \Rightarrow \quad x<-\sqrt{4+e} \quad , \quad x>+\sqrt{4+e} \end{cases}$$




per cui : $-\sqrt{4+e}<x<-\sqrt{4+e^{1/2}} \quad , \quad +\sqrt{4+e^{1/3}}<x<+\sqrt{4+e}$

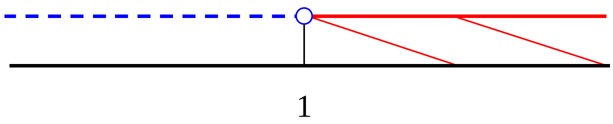
da confrontarsi infine con la condizione di realtà iniziale.



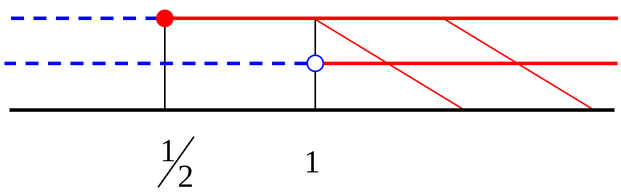

di qui si può notare l'insieme delle soluzioni che soddisfano la disequazione.

**<u>Nota Bene</u> :** in una disequazione logaritmica se si opera con logaritmi la cui base è minore di 1 al momento di eliminare i logaritmi stessi si procederà al cambio del verso della disequazione stessa.

Es : $\quad 2\log_{1/2}(x-1)-\log_{1/2}x^2 \geq 0 \qquad$ condiz. di real. $\quad x>1$




$$\log_{1/2}(x-1)^2 \geq \log_{1/2}x^2 \longrightarrow (x-1)^2 \leq x^2 \longrightarrow -2x+1 \leq 0 \longrightarrow x \geq 1/2$$




da cui avremo infine : $\quad x>1$

# USO DEI PULSANTI

| | |
|---|---|
| ? | Visualizza solo la soluzione dell'esercizio |
| RISOLVI | Visualizza le soluzioni di tutti gli esercizi |
| NASCONDI | Nasconde le soluzioni |
| ESERCIZI | Torna all'indice degli esercizi |
| INDICE | Torna all'indice della lezione |

## Calcolare i seguenti logaritmi :

**1.** $\log_2 \dfrac{1}{128}$ ?

**2.** $\log_4 \dfrac{1}{16}$ ?

**3.** $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{243}$ ?

**4.** $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{4}{64}$ ?

**5.** $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$ ?

**6.** $\log_{\sqrt{5}} 125$ ?

**7.** $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$ ?

**8.** $\log_2 \sqrt[4]{2}$ ?

**9.** $\log_{10} \frac{1}{100}$ ?

**10.** $\log_{16} 64$ ?

**Calcolare la base dei seguenti logaritmi: ( ricordando la definizione di logaritmo , e la positività della sua base )** :

**11.** $\log_x 49 = 2$

?

**12.** $\log_x \frac{1}{81} = -4$

?

**13.** $\log_x \frac{1}{64} = -2$

?

**14.** $\log_x \frac{1}{8} = 3$

?

**15.** $\log_x \frac{1}{243} = 5$

?

**16.** $\log_x 4\sqrt{2} = 5$ ?

**17.** $\log_x 27 = 3$ ?

**18.** $\log_x 64 = 3$ ?

**19.** $\log_x 3\sqrt[3]{3} = \dfrac{4}{3}$ ?

**20.** $\log_x 6 = 3$ ?

**Stabilire le condizioni di esistenza (realtà) dei seguenti logaritmi:**

**21.** $\log_{1/2}(-4-2x)$ ?

**22.** $\log_2\left(x^2-5x+6\right)$ ?

**23.** $\log_x(3x+3)$ ?

**24.** $\log_{x+3}(3x+9)$ ?

**25.** $\log_{3/4}(-5-4x)$ ?

**26.** $\log_5\left(2x^2-5x-3\right)$ ?

**27.** $\log_x(6-2x)$ ?

**28.** $\log_{x-3}(2-2x)$ ?

**29.** $\log_{-x}(2+x)$

?

**30.** $\log_{-2x+1}(2-2x^2)$

?

**Utilizzando le proprietà dei logaritmi semplificare :**

**31.** $\log_a 2b + 2\log_a b$ ?

**32.** $2\log_a x - \log_a 3x + 4\log_a x^2$ ?

**33.** $\log_b c - \log_b ac^2 + \log_b a$ ?

**34.** $4\log_a d - \frac{1}{4}\log_a d^2 y$ ?

**35.** $2\log_n a + 3\log_n c - \log_n n^2 + 2\log_n n$ ?

**36.** $2\log_c d^3 + \frac{1}{2}\log_c a - \log_c ab + \frac{1}{3}\log_c 2n$ ?

## Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

**37.** $\log(-x-2)+\log(1-x)=\log 1+\log\left(x^2-6\right)$

?

**38.** $\log(4-x)=\log(x+6)+2\log(x+2)$

?

**39.** $\log(-x)+\log(2-x)+\log(4)=\log\left(10x^2+2\right)$

?

**40.** $2\log(2x+3)=\log(x+1)$

?

**41.** $\log(x–.3)=2\log(2x+1)-\log(2x)$

?

**42.** $\log(x+4)-\log(x)=\log(3)+\log(x^2-3)$

?

**43.** $2\log(-2x+1)=\log\left(8x^2+1\right)$

?

**44.** $\log^2(x+4) - 3\log(x+4) = \log_2 16$

?

**45.** $2\log^3(x-1) - [\log(x-1)]^2 = 0$

?

**46.** $\log_3(x-2)+\log_3(2x-5)=\frac{1}{4}\log_3 1$

?

**47.** $\ln(x-2)-\ln(4-x)=\ln e-\ln(3x-9+e)$

?

## Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

**48.** $\log(2x-2)+\log(x-1)<\log(x+2)$

?

**49.** $\log x + \log(x-1) < \log(x^2+5)$

?

**50.** $\log(2+x)+\log(3+x)>\log 10+\log(x+2)$

?

**51.** $2\log(x+4)+\log 3>\log(3x^2)$

?

**52.** $\log(2-2x) > \log(x+4) + \log(x-1)$

?

**53.** $\ln(2-4x) + \ln(2+x) + < \ln(x+4)$

?

**54.** $\log_{0,1}(2x+6)+\log_{0,1}(2x-4)>2\log_{0,1}(x-1)$

?

**55.** $\log_3\left(x^2+3\right)-\log_3\left(x^2+1\right)\geq\log_3 2-\log_3 8$

?

**56.** $\log_{0,3}(x-2)+\log_{0,3}(2x-2)-\log_{0,3}(3x-3)<\log_{0,3}5$ ?

**57.** $\log\left(x^2-6x+9\right)>\log x^2-\log 3$

?