

## 5<sup>^</sup> Lezione

- Logaritmi .
- Proprietà dei logaritmi
- Equazioni logaritmiche .
- Disequazioni logaritmiche .
- Allegato Esercizi .

## LOGARITMI:

Per logaritmo intendiamo una espressione letterale indicante un valore numerico.

**Definizione** : Si chiamerà logaritmo di un numero reale positivo  $b$  rispetto alla *base*  $a$ , positiva e diversa dall'unità, quel numero reale  $c$  dato come esponente alla *base* per ottenere il numero reale  $b$ .

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

dove con  $a$  indichiamo la **base** del logaritmo

dove con  $b$  indichiamo l'**argomento** del logaritmo

dove con  $c$  indichiamo il **valore** del logaritmo.

$$\text{Es : } \log_2 x = 3 \quad \longrightarrow 2^3 = x \quad , \quad x = 8$$

$$\log_x 4 = 2 \quad \longrightarrow x^2 = 4 \quad , \quad \begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = +2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ma poiché } x > 0 \\ \text{è l'unico valore accett.} \end{array}$$

$$\log_2 16 = x \quad \longrightarrow 2^x = 16$$

L'ultimo esempio fatto ci porta ad un nuovo tipo di equazione, detta eq. esponenziale.

Quindi avremo un dato assunto per ipotesi , e cioè la base sempre positiva, ma diversa da 1. Dovremo altresì esprimere di volta in volta quella che sarà la condizione di realtà di ogni logaritmo , **l'argomento strettamente positivo**.

$$\log_a b \longrightarrow \begin{cases} Hp \rightarrow a > 0, a \neq 1 \\ \text{Condizione di Esistenza} \rightarrow b > 0 \end{cases}$$

Nella maggior parte dei casi ci troveremo a lavorare con logaritmi di basi prefissate che nel nostro caso saranno :

la base dei logaritmi naturali ,  $e$  , con  $e$  numero di Nepero (  $e = 2,71\dots$  )

la base dei logaritmi decimali ,  $10$  .

I logaritmi naturali li indicheremo con il simbolo  $\ln$  , i decimali con  $\log$  .

Abbiamo detto che il valore della base di qualsiasi logaritmo viene assunta per ipotesi strettamente positiva , ma diversa da 1 ; questo evidentemente perché dalla definizione di logaritmo non esiste alcun valore dell'esponente  $c$  che dato alla base 1 permetta di avere un prefissato numero  $b$ .

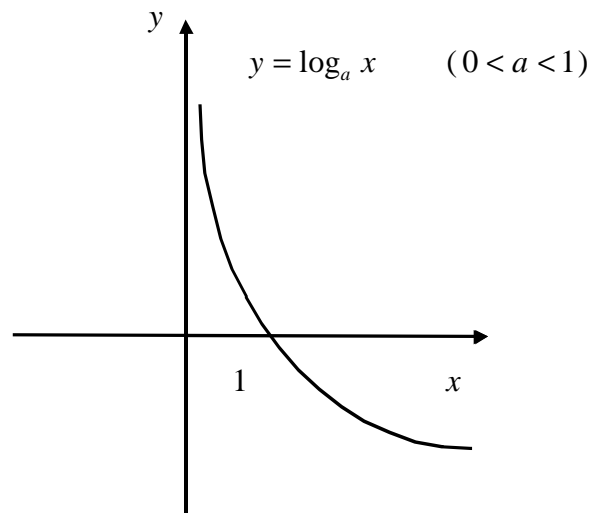
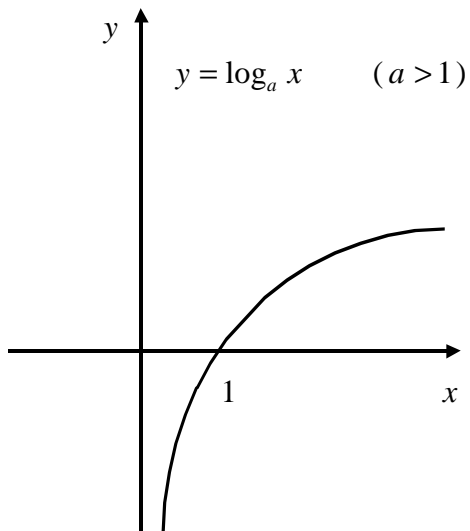
Infatti :  $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

se consideriamo per es :  $b = 5$  , con  $a = 1$  si avrebbe  $1^c = 5$  e non esiste alcun valore di  $c$  che verifichi l'uguaglianza.

Se volessimo rappresentare in un riferimento cartesiano ortogonale la legge che lega ad ogni valore della variabile  $x$  , rappresentativa di tutti gli argomenti dei logaritmi, il corrispondente valore del logaritmo , espresso dalla variabile  $y$  troveremmo un diverso comportamento a seconda del valore assunto dalle basi.

Più precisamente :

$$y = \log_a x$$



### PROPRIETA' DEI LOGARITMI

$$\log_a 1 = 0 \longrightarrow a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1 \longrightarrow a^1 = a$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left( \frac{b}{c} \right)$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a b$$

$$\log_a N = \frac{\log_x N}{\log_x a}$$

## EQUAZIONI LOGARITMICHE :

Risolvere un'equazione logaritmica significa determinare quel particolare valore da attribuire alla variabile  $x$  affinché l'uguaglianza sia verificata.

Per arrivare a ciò, utilizzando le proprietà dei logaritmi, è indispensabile ricondursi all'uguaglianza di due membri che siano costituiti da un solo logaritmo, nella stessa base, con lo stesso coefficiente e dello stesso grado.

**Nota Bene :** Prima di risolvere qualsiasi esercizio relativo ai logaritmi è assolutamente indispensabile discutere la realtà dei singoli logaritmi, formulando così un sistema che risolto ci dà la condizione per la quale ha senso risolvere l'esercizio.

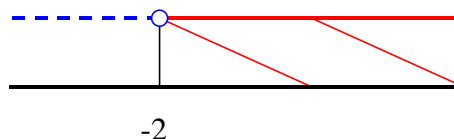
Per cui si avrà:  $\log_a [A(x)] = \log_a [B(x)]$

condiz. di realtà  $\longrightarrow \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

eliminando i logaritmi  $A(x) = B(x)$  che risolta darà le soluzioni.

Es:  $\log(x+2) = 0$  cond. realtà  $\longrightarrow (x+2 > 0)$

$x > -2$

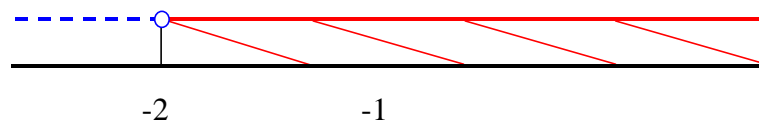


quindi le soluzioni finali della equazione saranno verificate se e solo se rientreranno nell'intervallo suddetto. Ricordiamo che la notazione  $\log$  ci indica un logaritmo decimale (in base 10).

Per cui riprendendo l'equazione avremo :

$$\log(x+2) = 0 \quad \text{che per le propr. dei logaritmi possiamo scrivere :}$$

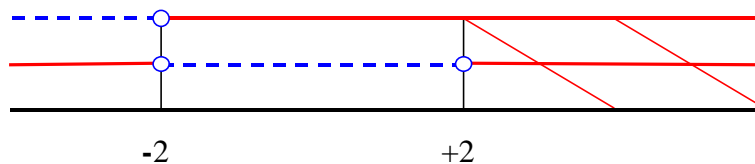
$$\log(x+2) = \log 1 \quad \text{di qui} \longrightarrow x+2 = 1 \quad \longrightarrow x = -1 \quad \text{che verifica.}$$



Infatti

$$\text{Es :} \quad \log(x^2 - 4) - \log(x+2) = 0$$

$$\text{condiz. di realt\`a} \quad \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x < -2, x > +2 \\ x > -2 \end{cases}$$



$$\text{risolvendo :} \quad \log(x^2 - 4) = \log(x+2)$$

$$(x^2 - 4) = (x + 2) \quad \longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} x_1 = +3 \longrightarrow \text{accett.} \\ x_2 = -2 \longrightarrow \text{non - accett.} \end{cases}$$

Potevamo risolvere anche così :

$$\log(x^2 - 4) - \log(x + 2) = 0$$

$$\log\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = \log 1$$

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$\text{da cui } \begin{cases} x_1 = +3 \Rightarrow \text{accett.} \\ x_2 = -2 \Rightarrow \text{non accett.} \end{cases}$$

### Caso particolare :

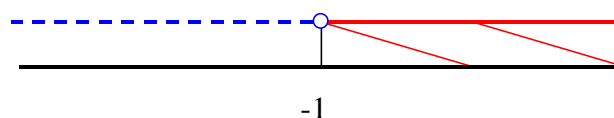
Si possono avere dei casi particolari nelle equazioni logaritmiche allorchè i gradi dei singoli logaritmi siano diversi tra loro.

Nella fattispecie sarà problematico riuscire a ricondursi ad avere due logaritmi nei rispettivi membri con le caratteristiche prima elencate ; per cui si procederà alla loro risoluzione tramite un metodo di sostituzione purchè i rispettivi argomenti siano tra loro uguali.

$$\text{Es :} \quad \log^2(x + 1) - 3\log(x + 1) + 2 = 0$$

E' evidente che la prima operazione consiste nella condizione di realtà

$$x + 1 > 0 \quad \longrightarrow \quad x > -1$$



$$\text{si pone} \quad \log(x + 1) = t \quad \text{da cui si ha :}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

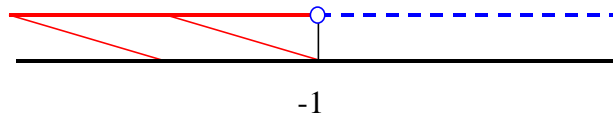
ora ricordando che :  $\log(x+1) = t$  si ha :

$$\begin{aligned} \log(x+1) = 1 &\Rightarrow \log(x+1) = \log 10^1 \Rightarrow x_1 = 9 \\ \log(x+1) = 2 &\Rightarrow \log(x+1) = \log 10^2 \Rightarrow x_2 = 99 \end{aligned}$$

e quindi alla fine si verificherà la bontà dei risultati ottenuti.  
Sia il valore di  $x_1$  che quello di  $x_2$  verificano la condizione di realtà.

Es :  $\log^2(-x-2) - \log(-x-2) = 0$

$$-x-2 > 0 \Rightarrow x < -2$$



si pone  $\log(-x-2) = t$  da cui si ha :

$$t^2 - t = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

da cui ricordando che :  $\log(-x-2) = t$  si ha :

$$\begin{aligned} \log(-x-2) = 0 &\Rightarrow \log(-x-2) = \log 10^0 \Rightarrow x_1 = -3 \\ \log(-x-2) = 1 &\Rightarrow \log(-x-2) = \log 10^1 \Rightarrow x_2 = -12 \end{aligned}$$

che soddisfano entrambi la condizione di realtà.



**Nota Bene** : ricordiamo bene alcune distinzioni importanti

$$\begin{aligned} \log^2 x &= \log x \cdot \log x & \text{oppure} & \log^2 x = (\log x)^2 \\ \log x^2 &= 2 \log x & \text{oppure} & \log x^2 = \log(x \cdot x) \end{aligned}$$

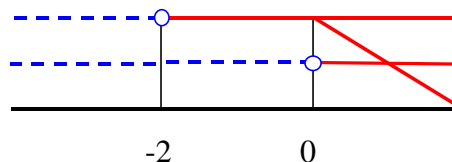
è quindi evidente che  $\log^2 x \neq \log x^2$

### DISEQUAZIONI LOGARITMICHE :

Si procederà al pari delle equazioni logaritmiche, ricordandoci che alla fine dell'esercizio metteremo a sistema l'insieme delle soluzioni trovate con la condizione di realtà iniziale.

Es :  $2 \log x - 2 \log(x+2) > 0$

Condiz. di realtà  $\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases}$

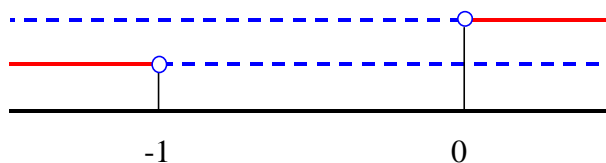


Applicando le proprietà dei logaritmi avremo :

$$2 \log x > 2 \log(x+2) \longrightarrow \log x^2 > \log(x+2)^2 \longrightarrow x^2 > (x+2)^2$$

da cui :  $4x + 4 < 0 \longrightarrow x < -1$

Per cui sarà infine che :

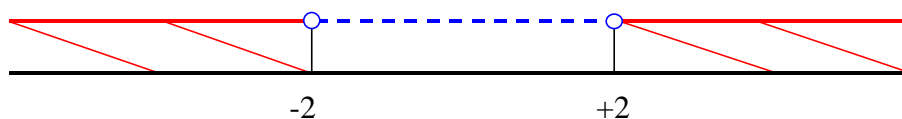


le soluzioni finali saranno :  $\forall x \in \mathfrak{R}$ .

Anche qui possiamo trovare il caso particolare :

$$\text{Es: } 3\log^2(x^2 - 4) - 4\log(x^2 - 4) + 1 \geq 0$$

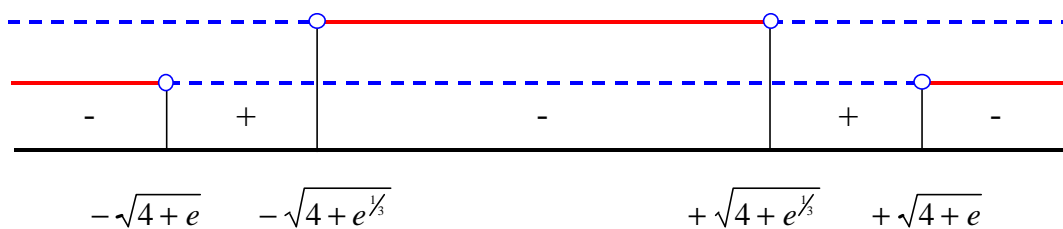
$$\text{Condiz. di realt\`a: } x^2 - 4 > 0 \longrightarrow x < -2, x > +2$$



quindi ponendo  $\log(x^2 - 4) = t$  si ha :

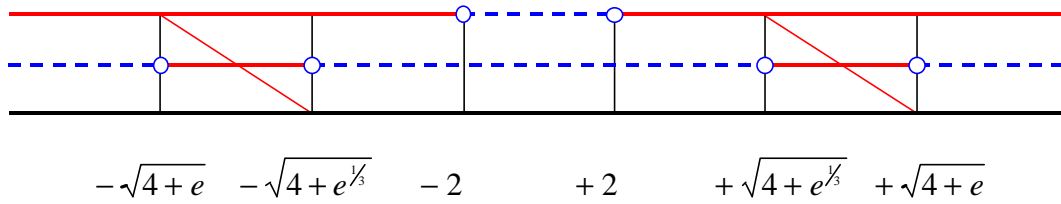
$$3t^2 - 4t + 1 \geq 0 \rightarrow t < \frac{1}{3}; t > 1 \quad \text{da cui: } \begin{cases} \log(x^2 - 4) < \frac{1}{3} \longrightarrow (x^2 - 4) < e^{1/3} \\ \log(x^2 - 4) > 1 \longrightarrow (x^2 - 4) > e \end{cases}$$

$$\text{Si avr\`a quindi che: } \begin{cases} x^2 < 4 + e^{1/3} \Rightarrow -\sqrt{4 + e^{1/3}} < x < +\sqrt{4 + e^{1/3}} \\ x^2 > 4 + e \Rightarrow x < -\sqrt{4 + e}, x > +\sqrt{4 + e} \end{cases}$$



$$\text{per cui: } -\sqrt{4 + e} < x < -\sqrt{4 + e^{1/3}}, \quad +\sqrt{4 + e^{1/3}} < x < +\sqrt{4 + e}$$

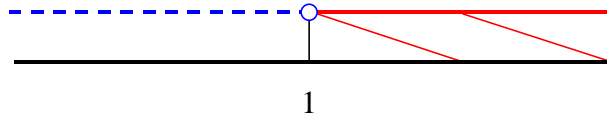
da confrontarsi infine con la condizione di realt\`a iniziale.



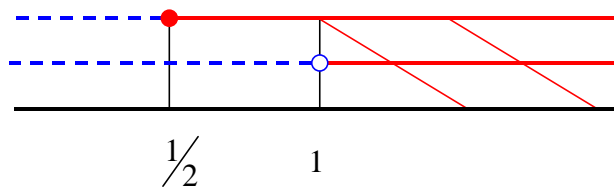
di qui si può notare l'insieme delle soluzioni che soddisfano la disequazione.

**Nota Bene :** in una disequazione logaritmica se si opera con logaritmi la cui base è minore di 1 al momento di eliminare i logaritmi stessi si procederà al cambio del verso della disequazione stessa.

Es :  $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq 0$     condiz. di real.     $x > 1$



$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} x^2 \quad \longrightarrow (x-1)^2 \leq x^2 \quad \longrightarrow -2x+1 \leq 0 \quad \longrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



da cui avremo infine :  $x > 1$

ESERCIZI SUL CALCOLO DEI LOGARITMI

ESERCIZI SUL CALCOLO DELLA BASE DEI LOGARITMI

ESERCIZI SULLA CONDIZIONE DI ESISTENZA DEI LOGARITMI

ESERCIZI SULLE SEMPLIFICAZIONI DEI LOGARITMI

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI LOGARITMICHE

**ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1°E DI 2°GRADO**

## USO DEI PULSANTI

Visualizza solo la soluzione dell'esercizio

Visualizza le soluzioni di tutti gli esercizi

Nasconde le soluzioni

Torna all'indice degli esercizi

Torna all'indice della lezione

Calcolare i seguenti logaritmi :

1.  $\log_2 \frac{1}{128}$

$$\log_2 \frac{1}{128} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2^7} \Rightarrow \log_2 2^{-7} \Rightarrow -7$$

2.  $\log_4 \frac{1}{16}$

$$\log_4 \frac{1}{16} \Rightarrow \log_4 \frac{1}{4^2} \Rightarrow \log_4 4^{-2} \Rightarrow -2$$

3.  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243}$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^5} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow 5$$

4.  $\log_{\frac{1}{4}} \frac{4}{64}$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{4}{64} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4^2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow 2$$

5.  $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

$$\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3^3} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^3 \Rightarrow 3$$

6.  $\log_{\sqrt{5}} 125$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} 5^3 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5})^2\right]^3 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^6 \Rightarrow 6$$

7.  $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} 5^{-2} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} \left[ (\sqrt{5})^2 \right]^{-2} \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^{-4} \Rightarrow -4$$

8.  $\log_2 \sqrt[4]{2}$

$$\log_2 \sqrt[4]{2} \Rightarrow \log_2 2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{1}{4}$$

9.  $\log_{10} \frac{1}{100}$

$$\log_{10} \frac{1}{100} \Rightarrow \log_{10} 10^{-2} \Rightarrow -2$$

10.  $\log_{16} 64$

$$\log_{16} 64 \Rightarrow \log_{16} 4^3 \Rightarrow \log_{16} (4^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log_{16} (16)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}$$

Calcolare la base dei seguenti logaritmi: ( ricordando la definizione di logaritmo , e la positività della sua base ) :

11.  $\log_x 49 = 2$

$$\log_x 49 = 2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

12.  $\log_x \frac{1}{81} = -4$

$$\log_x \frac{1}{81} = -4 \Rightarrow x^{-4} = \frac{1}{81} \Rightarrow x^{-4} = \frac{1}{3^4} \Rightarrow x^{-4} = 3^{-4} \Rightarrow x = 3$$

13.  $\log_x \frac{1}{64} = -2$

$$\log_x \frac{1}{64} = -2 \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{64} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{8^2} \Rightarrow x^{-2} = 8^{-2} \Rightarrow x = 8$$

14.  $\log_x \frac{1}{8} = 3$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2^3} \Rightarrow x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

15.  $\log_x \frac{1}{243} = 5$

$$\log_x \frac{1}{243} = 5 \Rightarrow x^5 = \frac{1}{243} \Rightarrow x^5 = \frac{1}{3^5} \Rightarrow x^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$



16.  $\log_x 4\sqrt{2} = 5$

$$\log_x 4\sqrt{2} = 5 \Rightarrow x^5 = 4\sqrt{2} \Rightarrow x^5 = \sqrt{2^5} \Rightarrow x^5 = (\sqrt{2})^5 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

17.  $\log_x 27 = 3$

$$\log_x 27 = 3 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x^3 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

18.  $\log_x 64 = 3$

$$\log_x 64 = 3 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x^3 = 4^3 \Rightarrow x = 4$$

19.  $\log_x 3\sqrt[3]{3} = \frac{4}{3}$

$$\log_x 3\sqrt[3]{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} \Rightarrow x^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = 3$$

20.  $\log_x 6 = 3$

$$\log_x 6 = 3 \Rightarrow x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$$

**Stabilire le condizioni di esistenza (realtà) dei seguenti logaritmi:**

21.  $\log_{1/2}(-4-2x)$

$$\log_{1/2}(-4-2x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow -4-2x > 0 \Rightarrow x < -2$$

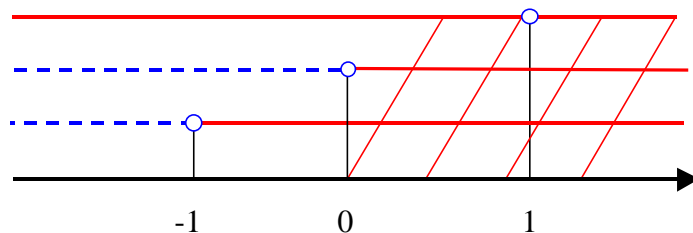
22.  $\log_2(x^2 - 5x + 6)$

$$\log_2(x^2 - 5x + 6) \Rightarrow C.R. \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2, x > 3$$

23.  $\log_x(3x+3)$

$$\log_x(3x+3) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 3x+3 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

da cui si ha :

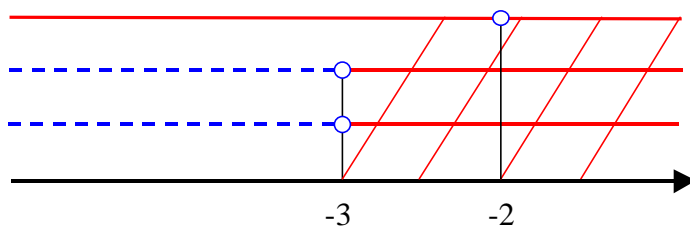


$$x > 0, \text{ con } x \neq 1$$

24.  $\log_{x+3}(3x+9)$

$$\log_{x+3}(3x+9) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 3x+9 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x+3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

da cui si ha :



$$x > -3, \text{ con } x \neq -2$$

25.  $\log_{\frac{3}{4}}(-5-4x)$

$$\log_{\frac{3}{4}}(-5-4x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow -5-4x > 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{4}$$

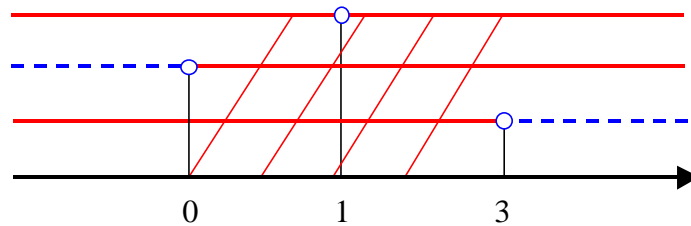
26.  $\log_5(2x^2-5x-3)$

$$\log_5(2x^2-5x-3) \Rightarrow C.R. \Rightarrow 2x^2-5x-3 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}, x > 3$$

27.  $\log_x(6-2x)$

$$\log_x(6-2x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 6-2x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

da cui si ha :

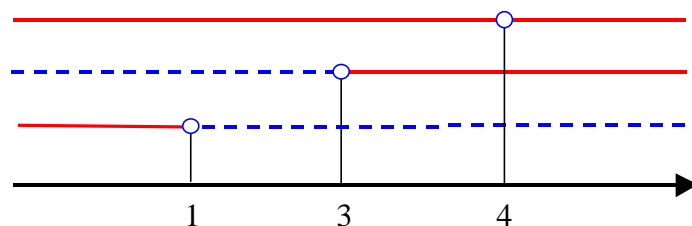


$$0 < x < 3, \text{ con } x \neq 1$$

28.  $\log_{x-3}(2-2x)$

$$\log_{x-3}(2-2x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 2-2x > 0 \\ x-3 > 0 \\ x-3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

da cui si ha :



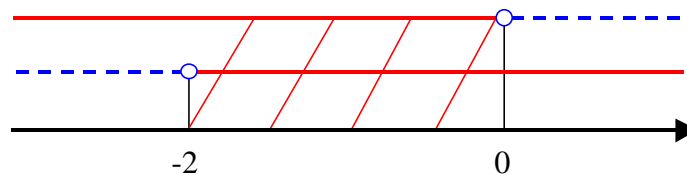
$$\forall x \in \mathfrak{R}$$

29.  $\log_{-x}(2+x)$

$$\log_{-x}(2+x) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 2+x > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < 0 \end{cases}$$

si noti come in questo caso non abbiamo posto la base diversa da 1 , in quanto ( caso particolare )  
per tale valore il logaritmo ammette valore reale .

da cui si ha :

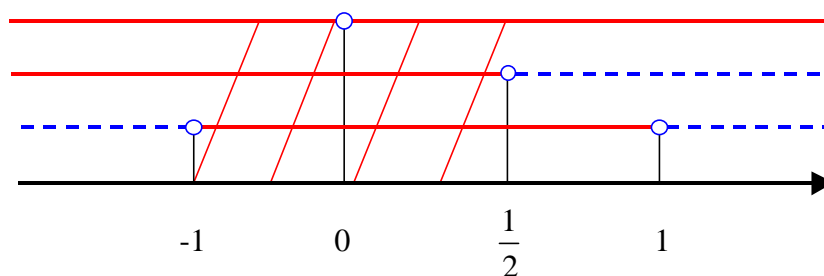


$$-2 < x < 0$$

30.  $\log_{-2x+1}(2-2x^2)$

$$\log_{-2x+1}(2-2x^2) \Rightarrow C.R. \Rightarrow \begin{cases} 2-2x^2 > 0 \\ -2x+1 > 0 \\ -2x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

da cui si ha :



$$-1 < x < \frac{1}{2}, \text{ con } x \neq 0$$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi semplificare :

31.  $\log_a 2b + 2\log_a b$

$$\log_a 2b + 2\log_a b \Rightarrow \log_a 2b + \log_a b^2 \Rightarrow \log_a 2b^3$$

32.  $2\log_a x - \log_a 3x + 4\log_a x^2$

$$2\log_a x - \log_a 3x + 4\log_a x^2 \Rightarrow \log_a x^2 - \log_a 3x + \log_a x^8 \Rightarrow \log_a \frac{x^2}{3x} + \log_a x^8 \Rightarrow \log_a \frac{x^9}{3}$$

33.  $\log_b c - \log_b ac^2 + \log_b a$

$$\log_b c - \log_b ac^2 + \log_b a \Rightarrow \log_b \frac{c}{ac^2} + \log_b a \Rightarrow \log_a \frac{ac}{ac^2} \Rightarrow \log_a \frac{1}{c}$$

34.  $4\log_a d - \frac{1}{4}\log_a d^2 y$

$$4\log_a d - \frac{1}{4}\log_a d^2 y \Rightarrow \log_a d^4 - \log_a (d^2 y)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \log_a \frac{d^4}{\sqrt[4]{d^2 y}}$$

35.  $2\log_n a + 3\log_n c - \log_n n^2 + 2\log_n n$

$$2\log_n a + 3\log_n c - \log_n n^2 + 2\log_n n \Rightarrow \log_n a^2 + \log_n c^3 - \log_n n^2 + \log_n n^2 \Rightarrow \log_n a^2 c^3$$

36.  $2\log_c d^3 + \frac{1}{2}\log_c a - \log_c ab + \frac{1}{3}\log_c 2n$

$$2\log_c d^3 + \frac{1}{2}\log_c a - \log_c ab + \frac{1}{3}\log_c 2n \Rightarrow \log_c d^6 + \log_c \sqrt{a} - \log_c ab + \log_c \sqrt[3]{2n}$$

$$\Rightarrow \log_c d^6 \sqrt{a} - \log_c ab + \log_c \sqrt[3]{2n} \Rightarrow \log_c \frac{d^6 \sqrt{a}}{ab} + \log_c \sqrt[3]{2n} \Rightarrow \log_c \frac{d^6 \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{2n}}{ab}$$

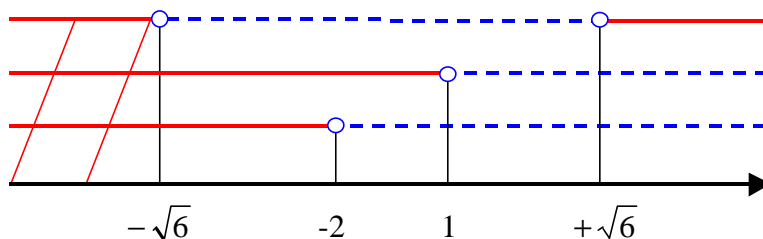
$$\Rightarrow \log_c \frac{d^6 \sqrt[6]{4a^3 n^2}}{ab}$$

### Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

37.  $\log(-x-2) + \log(1-x) = \log 1 + \log(x^2-6)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} -x-2 > 0 \\ 1-x > 0 \\ x^2-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ x < -\sqrt{6} , x > +\sqrt{6} \end{cases}$

e quindi :



$$x < -\sqrt{6}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(-x-2) + \log(1-x) = \log 1 + \log(x^2-6)$$

$$\Rightarrow \log[(-x-2)(1-x)] = \log(x^2-6)$$

$$\Rightarrow (-x-2)(1-x) = x^2-6$$

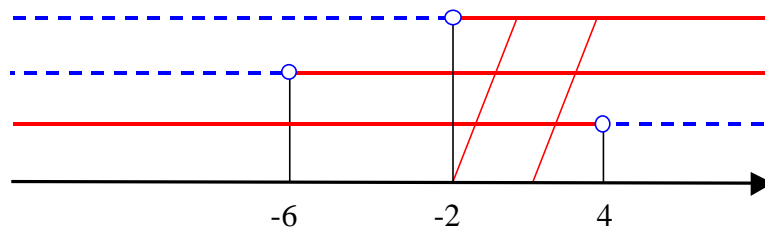
$$\Rightarrow x^2 - x - 2 + 2x = x^2 - 6 \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

che quindi , rispettando la condizione di realtà , è la soluzione dell'equazione .

38.  $\log(4-x) = \log(x+6) + 2\log(x+2)$

$$\text{Condizione di realt\`a : } \begin{cases} 4-x > 0 \\ x+6 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -6 \\ x > -2 \end{cases}$$

e quindi :



$$-2 < x < 4$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(4-x) = \log(x+6) + 2\log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log(4-x) = \log[(x+6)(x+2)]$$

$$\Rightarrow (4-x) = (x+6)(x+2)$$

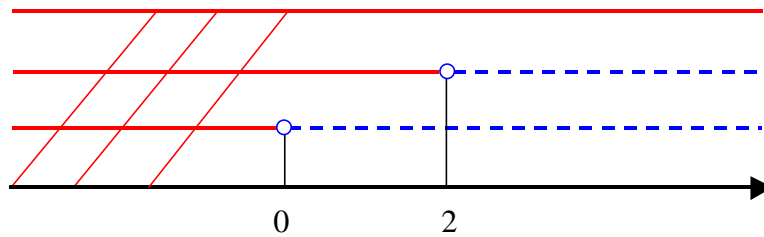
$$\Rightarrow 4-x = x^2 + 2x + 6x + 12 \Rightarrow x^2 + 9x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

e per la condizione di realt\`a, la soluzione \u00e8  $x = -1$ .

39.  $\log(-x) + \log(2-x) + \log(4) = \log(10x^2 + 2)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} -x > 0 \\ 2-x > 0 \\ 10x^2+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < 2 \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

e quindi :



$$x < 0$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(-x) + \log(2-x) + \log 4 = \log(10x^2 + 2)$$

$$\Rightarrow \log[4(-x)(2-x)] = \log(10x^2 + 2)$$

$$\Rightarrow -8x + 4x^2 = 10x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{3} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

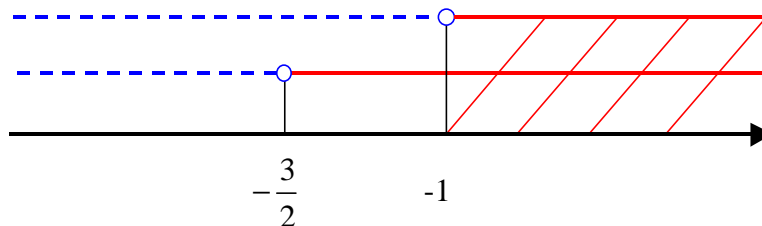
che quindi , rispettando la condizione di realtà , sono soluzioni dell'equazione .



40.  $2 \log(2x+3) = \log(x+1)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > -1 \end{cases}$

e quindi :



$x > -1$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$2 \log(2x+3) = \log(x+1)$

$\Rightarrow \log(2x+3)^2 = \log(x+1)$

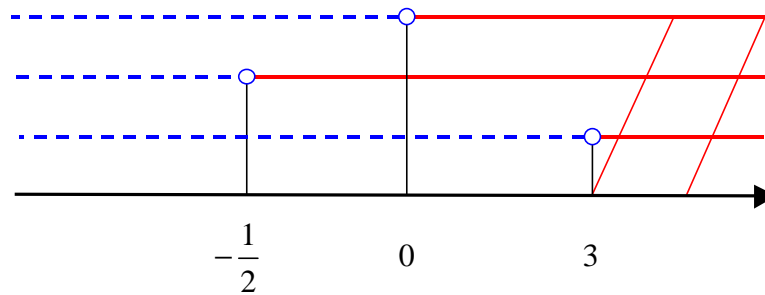
$\Rightarrow (2x+3)^2 = x+1$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = x + 1 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = -7 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$

41.  $\log(x-3) = 2 \log(2x+1) - \log(2x)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$

e quindi :



$$x > 3$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(x-3) = 2\log(2x+1) - \log(2x)$$

$$\Rightarrow \log(x-3) = \log(2x+1)^2 - \log(2x)$$

$$\Rightarrow x-3 = \frac{(2x+1)^2}{2x} \Rightarrow \frac{2x(x-3)}{2x} = \frac{(2x+1)^2}{2x}$$

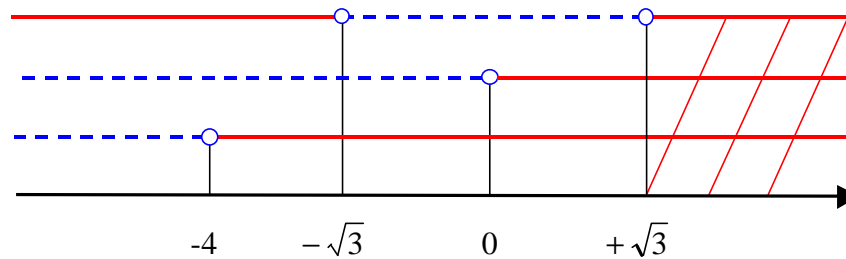
$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{23}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-5 - \sqrt{23}}{2} \\ x_2 = \frac{-5 + \sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

che quindi , non rispettando la condizione di realtà , non sono soluzioni dell'equazione .  $\forall x \in \mathfrak{R}$

$$42. \quad \log(x+4) - \log(x) = \log(3) + \log(x^2 - 3)$$

$$\text{Condizione di realtà : } \begin{cases} x+4 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 0 \\ x < -\sqrt{3} \text{ , } x > +\sqrt{3} \end{cases}$$

e quindi :



$$x > +\sqrt{3}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log(x+4) - \log(x) = \log(3) + \log(x^2 - 3)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x+4}{x}\right) = \log 3(x^2 - 3)$$

$$\Rightarrow \frac{x+4}{x} = 3x^2 - 9 \Rightarrow \frac{x+4}{x} = \frac{3x^3 - 9x}{x}$$

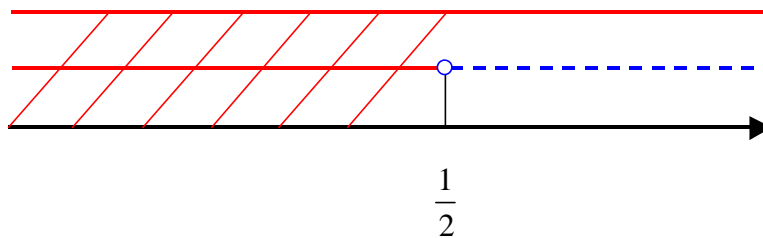
$$\Rightarrow 3x^3 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(3x^2 + 6x + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ x_1 = 2 \text{ , } x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \right\}$$

e per la condizione di realtà, la soluzione dell'equazione  $x = 2$  .

$$43. \quad 2 \log(-2x+1) = \log(8x^2 + 1)$$

$$\text{Condizione di realtà : } \begin{cases} -2x+1 > 0 \\ 8x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

e quindi :



$$x < \frac{1}{2}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$2 \log(-2x+1) = \log(8x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \log(-2x+1)^2 = \log(8x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (-2x+1)^2 = 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 8x^2 + 1 \Rightarrow 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

che per la condizione di realtà, sono soluzioni dell'equazione .

44.  $\log^2(x+4) - 3\log(x+4) = \log_2 16$

Condizione di realtà :  $x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$  e posto  $\log(x+4)=t$  :

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

e risostituendo  $\log(x+4)=t$  :

$$\log(x+4) = -1$$

e ricordando che :  $n = \log_a a^n \Rightarrow$

$$\log(x+4) = \log 10^{-1}$$

$$\log(x+4) = 4$$

$$\log(x+4) = \log 10^4$$

$$(x+4) = 10^{-1} \Rightarrow x = 10^{-1} - 4$$

da cui :

$$(x+4) = 10^4 \Rightarrow x = 10^4 - 4$$

che per la condizione di realtà sono soluzioni dell'equazione .

45.  $2\log^3(x-1) - [\log(x-1)]^2 = 0$

Condizione di realtà :  $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$  e posto  $\log(x-1)=t$  :

$$2t^3 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2(2t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_{1/2} = 0 \\ t_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e risostituendo  $\log(x-1)=t$  :

$$\log(x-1) = 0$$

e ricordando che :  $n = \log_a a^n \Rightarrow$

$$\log(x-1) = \log 10^0$$

$$\log(x-1) = \frac{1}{2}$$

$$\log(x-1) = \log 10^{\frac{1}{2}}$$

$$(x-1) = 1 \Rightarrow x = 2$$

da cui :

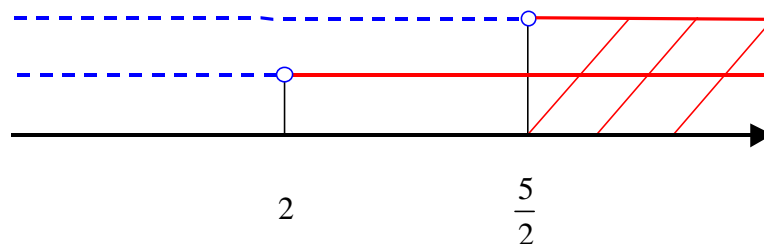
$$(x-1) = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{10} + 1$$

che per la condizione di realtà sono soluzioni dell'equazione .

$$46. \quad \log_3(x-2) + \log_3(2x-5) = \frac{1}{4} \log_3 1$$

$$\text{Condizione di realtà : } \begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

e quindi :



$$x < \frac{5}{2}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_3(x-2) + \log_3(2x-5) = \frac{1}{4} \log_3 1$$

$$\Rightarrow \log_3[(x-2)(2x-5)] = \log_3 1$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-5) = 1$$

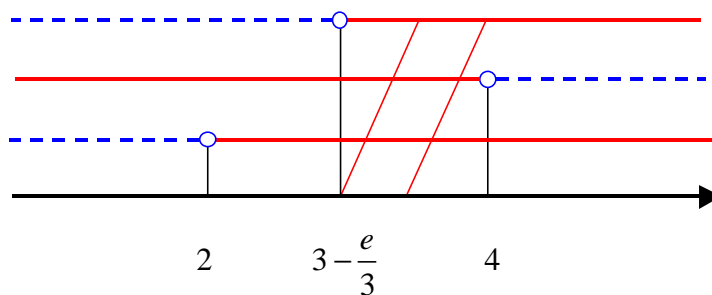
$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 4x + 10 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

e per la condizione di realtà,  $x = 3$  è la soluzione dell'equazione .

47.  $\ln(x-2) - \ln(4-x) = \ln e - \ln(3x-9+e)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 4-x > 0 \\ 3x-9+e > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 4 \\ x > \frac{9-e}{3} \quad ( x > 3 - \frac{e}{3} ) \end{cases}$

e quindi :



$$3 - \frac{e}{3} < x < 4$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\ln(x-2) - \ln(4-x) = \ln e - \ln(3x-9+e)$$

$$\Rightarrow \ln(x-2) + \ln(3x-9+e) = \ln e + \ln(4-x)$$

$$\Rightarrow \ln[(x-2)(3x-9+e)] = \ln[e(4-x)] \Rightarrow (x-2)(3x-9+e) = e(4-x)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x + ex - 6x + 18 - 2e = 4e - ex \Rightarrow 3x^2 + 2ex - 15x + 18 - 6e = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + (2e-15)x + 6(3-e) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{(2e-15)^2 - 72(3-e)}}{6} =$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{4e^2 - 60e + 225 - 216 + 72e}}{6} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{4e^2 + 12e + 9}}{6} =$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{(15-2e) \pm \sqrt{(2e+3)^2}}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{(15-2e) + (2e+3)}{6} = 3 \\ x_2 = \frac{(15-2e) - (2e+3)}{6} = \frac{2(3-e)}{3} \end{cases}$$

e per la condizione di realtà, la soluzione dell'equazione  $x = 3$ .

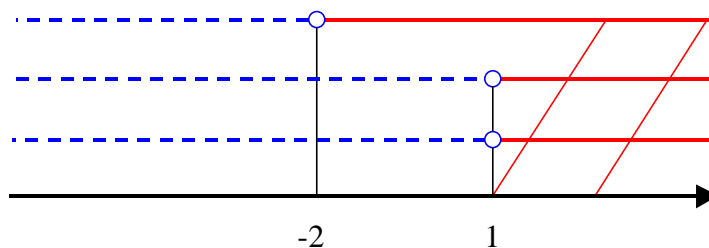


## Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

48.  $\log(2x-2) + \log(x-1) < \log(x+2)$

$$\text{Condizione di realtà : } \begin{cases} 2x-2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1 \\ x > -2 \end{cases}$$

e quindi :



$$x > 1$$

Riprendendo la disequazione di partenza :

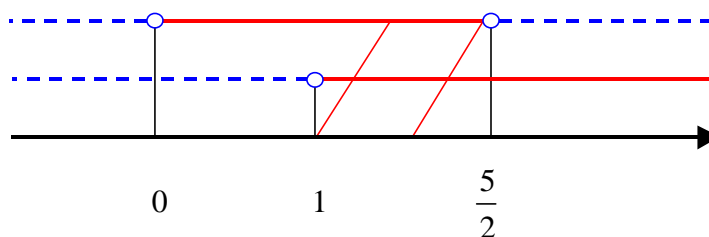
$$\log(2x-2) + \log(x-1) < \log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log[(2x-2)(x-1)] < \log(x+2)$$

$$\Rightarrow (2x-2)(x-1) < x+2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 2x + 2 < x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$$

per arrivare infine ad avere :

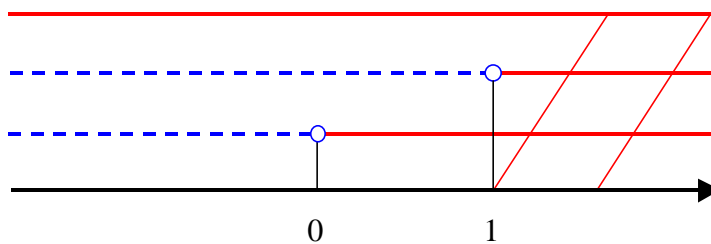


$$1 < x < \frac{5}{2} \text{ soluzione della disequazione .}$$

49.  $\log x + \log(x-1) < \log(x^2 + 5)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x^2+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

e quindi :



$x > 1$

Riprendendo la disequazione di partenza :

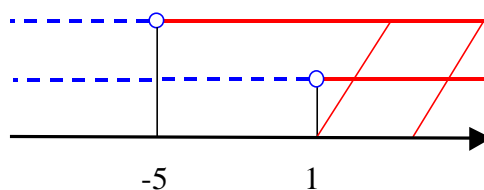
$\log x + \log(x-1) < \log(x^2 + 5)$

$\Rightarrow \log[x(x-1)] < \log(x^2 + 5)$

$\Rightarrow x(x-1) < x^2 + 5$

$\Rightarrow x^2 - x < x^2 + 5 \Rightarrow x > -5$

per arrivare infine ad avere :

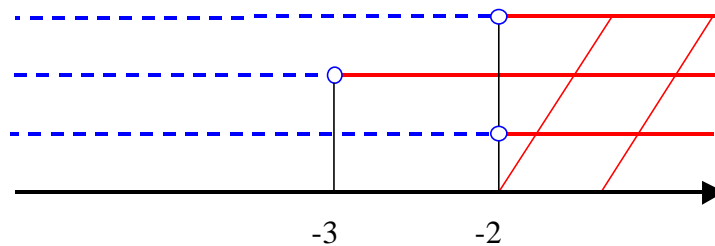


$x > 1$  soluzione della disequazione .

50.  $\log(2+x) + \log(3+x) > \log 10 + \log(x+2)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} 2+x > 0 \\ 3+x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \\ x > -2 \end{cases}$

e quindi :



$$x > -2$$

Riprendendo la disequazione di partenza :

$$\log(2+x) + \log(3+x) > \log 10 + \log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log[(2+x)(3+x)] > \log[10(x^2+5)]$$

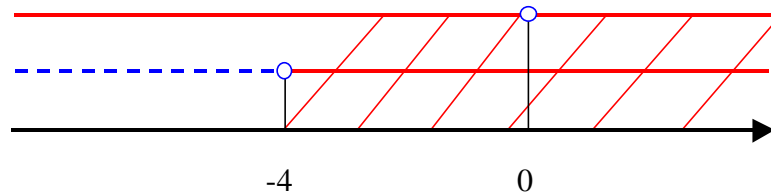
$$\Rightarrow (2+x)(3+x) > 10(x^2+5)$$

$$\Rightarrow 6+2x+3x+x^2 > 10x^2+50 \Rightarrow 9x^2-5x+44 < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$$

51.  $2 \log(x+4) + \log 3 > \log(3x^2)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x+4 > 0 \\ 3x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$

e quindi :



$x > -4$  ,  $x \neq 0$

Riprendendo l'equazione di partenza :

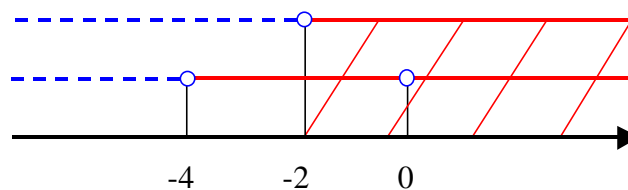
$2\log(x+4) + \log 3 > \log(3x^2)$

$\Rightarrow \log[3(x+4)^2] > \log(3x^2)$

$\Rightarrow 3(x+4)^2 > 3x^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 24x + 48 > 3x^2 \Rightarrow 24x + 48 > 0 \Rightarrow x > -2$

per arrivare infine ad avere :

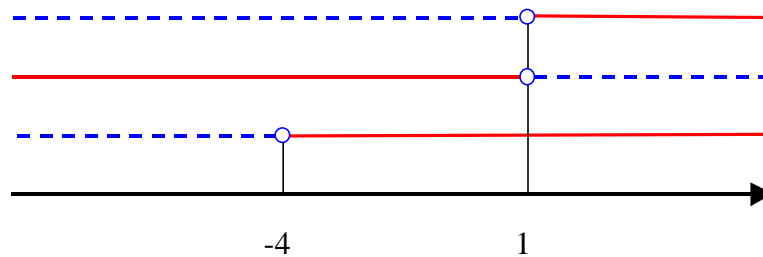


$x > -2$  ,  $x \neq 0$  soluzione della disequazione .

52.  $\log(2 - 2x) > \log(x + 4) + \log(x - 1)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} 2 - 2x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -4 \\ x > 1 \end{cases}$

e quindi :



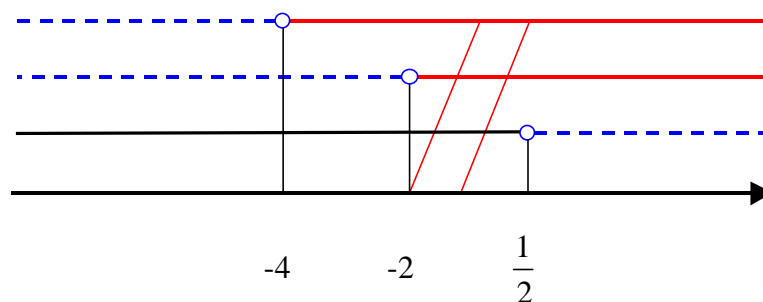
$\forall x \in \mathfrak{R}$

e quindi non essendoci valori reali che soddisfano la condizione di realtà, la disequazione non ammette soluzioni.

53.  $\ln(2 - 4x) + \ln(2 + x) < \ln(x + 4)$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} 2 - 4x > 0 \\ 2 + x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -2 \\ x > -4 \end{cases}$

e quindi :



$-2 < x < \frac{1}{2}$

Riprendendo l'equazione di partenza :

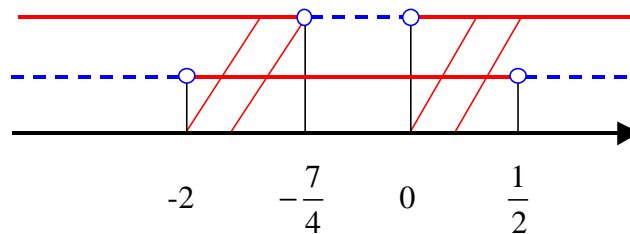
$$\ln(2-4x) + \ln(2+x) < \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow \ln[(2-4x)(2+x)] < \ln(x+4)$$

$$\Rightarrow (2-4x)(2+x) < x+4$$

$$\Rightarrow 4+2x-8x-4x^2 < x+4 \Rightarrow 4x^2+7x > 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{4}, \quad x > 0$$

per arrivare infine ad avere :

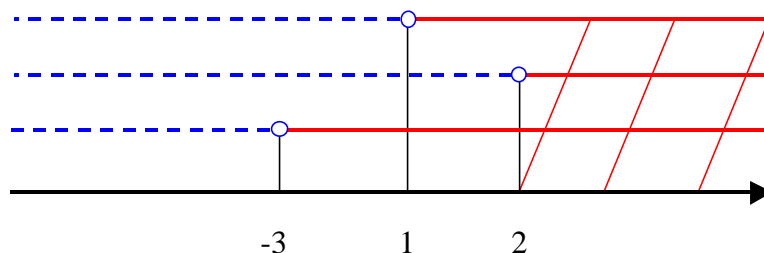


$$-2 < x < -\frac{7}{4}, \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{soluzione della disequazione.}$$

**54.**  $\log_{0,1}(2x+6) + \log_{0,1}(2x-4) > 2\log_{0,1}(x-1)$

$$\text{Condizione di realt\`a : } \begin{cases} 2x+6 > 0 \\ 2x-4 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

e quindi :



$$x > 2$$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_{0,1}(2x+6) + \log_{0,1}(2x-4) > 2\log_{0,1}(x-1)$$

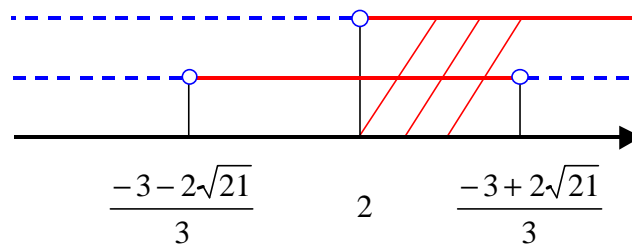
$$\Rightarrow \log_{0,1}[(2x+6)(2x-4)] > \log_{0,1}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow (2x+6)(2x-4) < (x-1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 12x - 24 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 25 < 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 84 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3-2\sqrt{21}}{3} < x < \frac{-3+2\sqrt{21}}{3}$$

per arrivare infine ad avere :



$$2 < x < \frac{-3+2\sqrt{21}}{3} \quad \text{soluzione della disequazione .}$$

55.  $\log_3(x^2+3) - \log_3(x^2+1) \geq \log_3 2 - \log_3 8$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x^2+3 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathfrak{R} \\ \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

e quindi :  $\forall x \in \mathfrak{R}$

Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_3(x^2 + 3) - \log_3(x^2 + 1) \geq \log_3 2 - \log_3 8$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2 + 3) + \log_3 8 > \log_3 2 + \log_3(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 8(x^2 + 3) > 2(x - 1)^2$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 24 > 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow 6x^2 + 4x + 22 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = -128 < 0$$

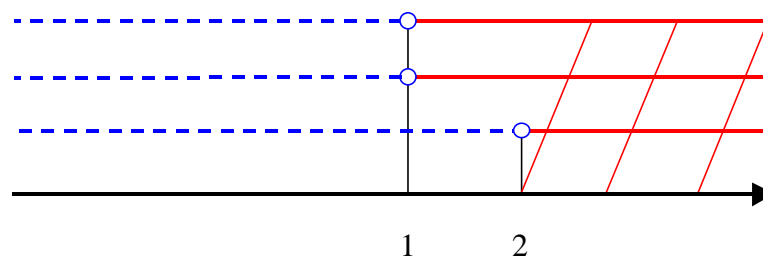
$$\Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$$

$\forall x \in \mathfrak{R}$  soluzione della disequazione .

**56.**  $\log_{0,3}(x - 2) + \log_{0,3}(2x - 2) - \log_{0,3}(3x - 3) < \log_{0,3} 5$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 2 > 0 \\ 3x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 1 \\ x > 1 \end{cases}$

e quindi :



$$x > 2$$



Riprendendo l'equazione di partenza :

$$\log_{0,3}(x-2) + \log_{0,3}(2x-2) - \log_{0,3}(3x-3) < \log_{0,3} 5$$

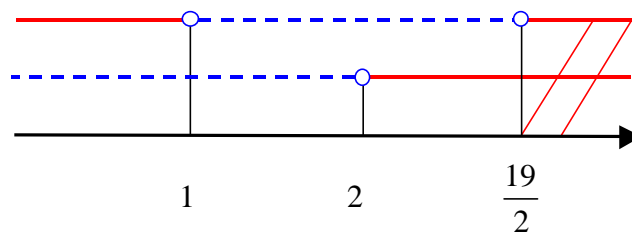
$$\Rightarrow \log_{0,3}[(x-2)(2x-2)] < \log_{0,3}(3x-3) + \log_{0,3} 5$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x-2) > 5(3x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4x + 4 > 15x - 15 \Rightarrow 2x^2 - 21x + 19 > 0 \Rightarrow \Delta = 289 > 0$$

$$\Rightarrow x < 1, \quad x > \frac{19}{2}$$

per arrivare infine ad avere :

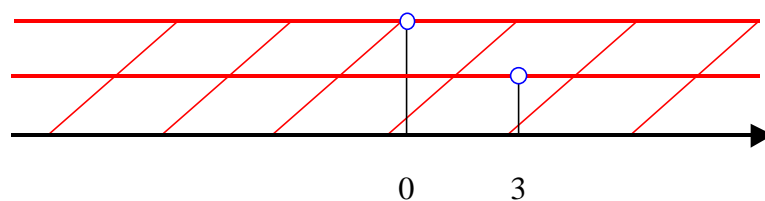


$$x > \frac{19}{2} \quad \text{soluzione della disequazione .}$$

**57.**  $\log(x^2 - 6x + 9) > \log x^2 - \log 3$

Condizione di realtà :  $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$

e quindi :



$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

Riprendendo l'equazione di partenza :  $\log(x^2 - 6x + 9) > \log x^2 - \log 3$

$$\log(x^2 - 6x + 9) > \log x^2 - \log 3$$

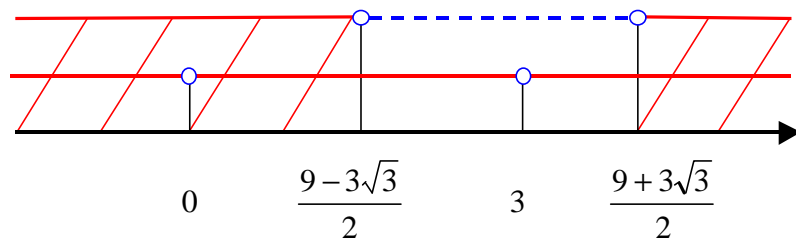
$$\Rightarrow \log[3(x^2 - 6x + 9)] > \log x^2$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 6x + 9) > x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 27 > x^2 \Rightarrow 2x^2 - 18x + 27 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 27 > 0$$

$$\Rightarrow x < \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}, \quad x > \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$$

per arrivare infine ad avere :



$$x < \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}, \quad x \neq 0, \quad x > \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2} \quad \text{soluzione della disequazione.}$$