2^ Lezione

- Equazioni di 1° .
- Equazioni di 2° .
- Equazioni fattoriali .
- Equazioni biquadratiche .
- Equazioni binomie .
- Equazioni fratte .
- Allegato Esercizi .

EQUAZIONI ALGEBRICHE

EQUAZIONI DI 1° GRADO

Con il termine di equazione intendiamo una uguaglianza tra due espressioni algebriche, contenenti una incognita (x). Risolvere tale equazione significa determinare quel particolare valore da attribuire alla incognita (x), per il quale risulti verificata l'eguaglianza .

Es. $ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad ax = -b \quad \Rightarrow \quad \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$

Es. risolvere : $2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -2$

verifica : $2(-2) + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

Es. risolvere : $-3x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x = -9 \quad \Rightarrow \quad 3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Es. risolvere : $2x - 3 + \frac{2}{3} = 2(3 - x) \quad \Rightarrow \quad \frac{6x - 9 + 2}{3} = \frac{6(3 - x)}{3} \quad \Rightarrow \quad 6x - 9 + 2 = 18 - 6x$

$\Rightarrow \quad 6x + 6x = 18 + 9 - 2 \quad \Rightarrow \quad 12x = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{25}{12}$

Es. risolvere : $-x + 2(x - 2) + [3(1 - x) + 2(-2x - 1)] = (3 - x) - 2$

$\Rightarrow \quad -x + 2x - 4 + [3 - 3x - 4x - 2] = 3 - x - 2 \quad \Rightarrow \quad -x + 2x - 7x + x = 3 - 2 + 4 - 1$

$\Rightarrow \quad -5x = +4 \quad \Rightarrow \quad 5x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{5}$

EQUAZIONI DI 2° GRADO

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ equazione completa ed ordinata

le soluzioni (o radici) dell'equazione si ottengono dall' applicazione diretta della formula :

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

detta formula risolutiva .

dove $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ si chiama discriminante dell'equazione .

Allo stesso modo si può utilizzare quella che si chiama formula ridotta (notevolmente vantaggiosa in certi casi)

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

Caratteristiche principali dell'equazione di 2° grado :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

1)	$\Delta \geq 0$	2 soluzioni $x_1 \neq x_2$ reali e distinte .
2)	$\Delta = 0$	2 soluzioni $x_1 = x_2$ reali e coincidenti . (il polinomio è il quadrato di un binomio).
3)	$\Delta < 0$	$\forall \; x \in \Re$ **(** nessuna soluzione in $\Re$ **)** .

<u>Casi particolari dell'equazione di 2° grado</u> : $\left(ax^2 + bx + c = 0\right)$

1) Se $\boxed{c = 0}$ l'equazione diventa $ax^2 + bx = 0$ detta anche equaz. <u>**SPURIA**</u>

applicando la formula risolutiva abbiamo :

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-b}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \dfrac{-b}{a} \\ x_2 = \dfrac{-b+b}{2a} = 0 \end{cases}$$

Gli stessi risultati li possiamo ottenere molto più semplicemente usando il raccoglimento a fattore comune :

$$ax^2 + bx = 0 \quad Þ \quad x(ax+b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Es. $$3x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) Se $\boxed{\boldsymbol{b} = 0}$ l'equaz. diventa $ax^2 + c = 0$ detta anche equaz. **<u>PURA</u>**

applicando nuovamente la formula risolutiva abbiamo :

$$x_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm \sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \end{cases}$$

Equivalentemente potremo risolvere anche così :

$$ax^2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \end{cases}$$

NOTA BENE : dal momento che stiamo operando nel campo dei numeri reali <u>le soluzioni di un'equazione pura sono accettabili se e solo se i valori dei coefficienti</u> a e c <u>sono di segno discorde</u>.

Quindi : $x_1, x_2 \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 0\,,\, c < 0 \\ a < 0\,,\, c > 0 \end{cases}$

Es. $4x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{16}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \quad (\, a > 0\,,\ c < 0 \,)$

$x^2 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-8} \quad \Rightarrow \quad \not\forall x \in \Re$

In questo caso si poteva ragionare in modo semplice considerando che un quadrato (x^2) che esprime una quantità positiva non può mai essere uguale ad un numero negativo.

Ricordiamo che il grado di un'equazione è dato dal grado massimo di un suo monomio e che il grado esprime altresì il numero massimo di soluzioni (radici) della stessa . Il monomio privo di fattore letterale (incognita) è detto termine noto dell'equazione ; la mancanza di tale termine qualifica l'equazione come omogenea .

Sintetizzando :

$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + zx^0 = 0$	equazione ordinata (potenze decrescenti) e completa (presenza del termine noto)
$ax^n + cx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + zx^0 = 0$	equazione ordinata (potenze decrescenti) e incompleta (mancanza di un termine)
$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + vx^1 = 0$	equazione ordinata omogenea (potenze decrescenti) e incompleta (mancanza del termine noto)

EQUAZIONI FATTORIALI

Si ottengono applicando le regole della scomposizione alle equazioni di grado superiore al secondo.

Es. $P^n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdot \ldots\ldots \cdot Z(x) = 0$

Es. risolvere : $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

Applicando le regole della scomposizione abbiamo :

$x^2(x-3) + 1(x-3) = 0$ raccogl. parziale o successivo

$(x-3) \cdot (x^2+1) = 0$

$A(x) \cdot B(x) = 0$ quindi un'equazione fattoriale altro non è che il prodotto di due o più fattori (rappresentati da singoli polinomi).

E' del tutto evidente che un prodotto di due o più fattori è nullo se almeno uno dei fattori lo è. Quindi risolveremo un'equazione fattoriale discutendo l'annullamento di ogni singolo fattore.

Tale procedimento deriva dalla cosiddetta **LEGGE DELL'ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO**.

$A(x) = 0$

$B(x) = 0$

Riprendendo l'esempio sopra avremo che :

$$(x-3) \cdot (x^2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \\ (x^2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1 \qquad \forall x \in \Re \quad (\textit{nessuna soluzione reale}) \end{cases}$$

Altro Es. risolvere : $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ equaz. di 3° grado

tramite Ruffini : $(x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-1) = 0$

$$A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)=0 \qquad \begin{cases}(x-1)=0 & \Rightarrow \quad x=1\\ (x-1)=0 & \Rightarrow \quad x=1\\ (x-1)=0 & \Rightarrow \quad x=1\end{cases}$$

Equivalentemente : $(x-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$ (radice o soluzione tripla)

EQUAZIONI BIQUADRATICHE

Un caso particolare di equazione di grado superiore al 2° è dato da un polinomio di 4° grado mancante dei termini di grado dispari ; tale tipo di equazione viene chiamata **biquadratica** .

Simbolicamente assumerà la forma $ax^4+bx^2+c=0$

La risoluzione di tale tipo di equazione avverrà tramite il metodo di sostituzione :

dopo aver posto $x^2=t$ andremo a risolvere una semplice equazione di 2° grado ; avremo dunque alla fine i corrispondenti valori di t che dovranno essere risostituiti nella condizione posta inizialmente per risolvere l'equazione pura corrispondente .

Es: risolvere : $3x^4-2x^2-1=0$

$$3x^4-2x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=t \quad \Rightarrow \quad 3t^2-2t-1=0 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\begin{cases}t_1=-\dfrac{1}{3}\\ t_2=1\end{cases}$$

e di qui si ha : $\begin{cases}x^2=-\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \not\forall x\in\Re\\ x^2=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=+1\end{cases}\end{cases}$

EQUAZIONI BINOMIE

Un tipo di equazione di grado superiore al 2° costituita da un polinomio di soli due termini (binomio) definisce quella che si chiama equazione **binomia** .

La forma sarà del tipo $ax^n + b = 0$

La risoluzione corretta di tale tipo di equazione avverrà tramite corrispondente equazione fattoriale .

Es: risolvere : $x^4 - 1 = 0$

$$x^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Es: risolvere : $x^3 - 8 = 0$

$$x^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Es: risolvere : $x^6 - 64 = 0$

$$x^6 - 2^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2)^3 - (2^2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

Da un punto di vista oggettivamente pratico , benchè il metodo corretto sia quello enunciato dianzi , possiamo determinare le radici reali di un’equazione binomia :

a) come un’equazione di 2° grado pura (se di indice n-pari) ,
b) come un’equazione di 1° grado , con la relativa estrazione di radice , (se di indice n-dispari) .

Sinteticamente :

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^n + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^n = -\dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}} \quad (n - pari) \\ \\ ax^n + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^n = -\dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}} \quad (n - dispari) \end{array}}$$

Riesaminando gli esempi precedenti si ha :

Es: risolvere : $x^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{1} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

Es: risolvere : $x^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2^3} \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Es: risolvere : $x^6 - 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^6 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{64} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{2^6} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

Es: risolvere : $x^3 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-3} \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt[3]{3}$

Es: risolvere : $x^8 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^8 = -5 \quad \Rightarrow \quad \not\forall\, x \in \Re$

EQUAZIONI FRATTE

Per equazione fratta si intende un’equazione la cui variabile (incognita x) compare anche al denominatore.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

Tale tipo di equazione si risolve considerando l’equazione formata dal solo numeratore, dopo la discussione del denominatore (con la conseguente sua esclusione). Sostanzialmente si applica
una delle proprietà fondamentali dell'algebra : moltiplicando ambedue i termini di una uguaglianza per uno stesso numero il risultato non cambia

$$B(x) \cdot \frac{A(x)}{B(x)} = 0 \cdot B(x)$$

Posto quindi $B(x) \neq 0$ andremo a risolvere $A(x) = 0$

Le soluzioni finali dell'equazione saranno accettabili se e solo se compatibili con la discussione fatta inizialmente.

Es. risolvere : $\dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 0$

posto dunque $(x-1) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$

risolveremo $x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{3} \\ x_2 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$ entrambe accettabili

poiché diverse da 1

Es. risolvere : $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$

posto $x + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1$

avremo $x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ con x_2 non accett.

Quindi la sola soluzione dell'equazione data rimane $x = 1$.

Es. $$\frac{x^2-3x+2}{x+1}=0$$

posto $x+1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq -1$

avremo $x^2-3x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{+3\pm\sqrt{9-8}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=+2 \\ x_2=+1 \end{cases}$ entrambe soluzioni .

NOTA : Vogliamo ricordare che le soluzioni (o radici) di un'equazione sono al massimo pari al grado dell'equazione.

USO DEI PULSANTI

? Visualizza solo la soluzione dell'esercizio

RISOLVI Visualizza le soluzioni di tutti gli esercizi

NASCONDI Nasconde le soluzioni

ESERCIZI Torna all'indice degli esercizi

INDICE Torna all'indice della lezione

Risolvere le seguenti equazioni di primo grado :

1. $3x-5+2(-x+1)=0$?

2. $3-7(-x+5)=2x+5$?

3. $4x-5(x-2)(x+2)+2(-x+1)=-5x^2+4x-3$?

4. $24+x(2-3x)-5-3x^2+2(x-8)=2x+4-9x^2$?

5. $x+6+2(-x-4x)=7(-3-2x)-(-5+3x)$?

6. $$\frac{x-3}{2}+2\left(-x+\frac{5}{4}\right)=7\left(\frac{-3x+2}{8}\right)-(-5+3x)$$?

7. $$\frac{2-3x}{3}+\left(\frac{5x+2}{4}\right)=\left(\frac{-3x+2}{6}\right)-(+3x-3)$$?

8. $$+2(-x+2)+\left(\frac{x+3}{12}\right)=\left(\frac{-3x+2}{3}\right)-\left(\frac{x-2}{4}\right)$$?

9. $$\frac{x-3}{5}+4\left(-x+\frac{5}{3}\right)=2\left(\frac{-3x-5}{15}\right)-(-2+x)$$?

10. $-2\left(-3x+\frac{5}{2}\right)=(-x+5)+2\left(\frac{3x+2}{3}\right)-3$

?

Risolvere le seguenti equazioni binomie di secondo grado, mancanti del termine noto (spurie).

11. $x^2 + 3x = 0$?

12. $5x^2 - 3x = 0$?

13. $x^2 - 5x = 0$?

14. $2x^2 + 3x = 0$?

15. $\dfrac{x^2}{3} - 2 = 3x + \dfrac{x^2 - 12}{6}$?

16. $\dfrac{x^2 + 1}{3} - 1 = \dfrac{x^2 - 4}{6} + x$?

17. $$\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}=1-\frac{x+7}{12}$$

?

18. $$\frac{x(x-2)}{4}+\frac{x-4}{3}=\frac{x-3}{2}+\frac{x+1}{6}$$

?

19. $$\frac{(x+3)(x-2)}{4}+\frac{(x-1)(x+1)}{5}=\frac{(x+1)(x-17)}{10}$$

?

20. $\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{3+x}{6}=\dfrac{x^2-2}{4}+\dfrac{1}{2}(3x+1)$

?

Risolvere le seguenti equazioni binomie di secondo grado (pure) :

21. $x^2 - 9 = 0$

?

22. $4x^2 - 49 = 0$

?

23. $-36 + 4x^2 = 0$

?

24. $8x^2 - 64 = 0$

?

25. $-x^2 + 16 = 0$

?

26. $25x^2 - 9 = 0$

?

27. $-49x^2 - 16 = 0$

?

28. $48x^2 - 4 = 0$

?

29. $121x^2 + 9 = 0$

?

30. $-x^2 + 1 = 0$

?

Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado (complete)

31. $x^2 - 5x + 6 = 0$?

32. $x^2 + 8x + 12 = 0$?

33. $x^2 + 10x + 21 = 0$?

34. $-x^2 + 5x - 6 = 0$?

35. $x^2 + 5x + 7 = 0$?

36. $x^2 - x - 6 = 0$?

37. $x^2 - 8x + 9 = 0$?

38. $\frac{x-1}{3} - \frac{3}{2}x = x^2 - 1$?

39. $$\frac{2x-1}{4}-\frac{3x+2}{2}=x^2$$?

40. $$\frac{5-3x^2}{6}-x=\frac{2-3x}{4}$$?

Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al secondo :

41. $x^3 - 2x + 1 = 0$?

42. $3x^3 - 4x^2 + 1 = 0$?

43. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

?

44. $x^3 - 2x - 21 = 0$

?

45. $-3x^3 - 2x^2 - 16 = 0$

?

46. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

?

47. $x^3 - 2x^4 = 0$

?

48. $x^3 + 8 = 0$

?

49. $x^4 - 16 = 0$

?

50. $x^5 + 1 = 0$

?

Risolvere le seguenti equazioni fratte :

51. $$\frac{x^2-3x}{2x}-\frac{x-2}{x-1}=0$$

?

52. $$\frac{3x+1}{x^2-x}=\frac{4}{x-1}$$

?

53. $\frac{-2x+2}{x}+4x=\frac{x+2}{2}$?

54. $3x-\frac{3x-1}{-x+1}=\frac{3-x}{2}$?

55. $\frac{x}{2x-4}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{2}$?

56. $\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{5x+2}{x^2}=\dfrac{3}{2}$

?

57. $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{1}{2x}=2$

?

58. $\dfrac{4-x}{x-3}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4-x}$?

59. $\dfrac{2-x}{x^2+2x+1}-\dfrac{4-x}{x+1}=1$?

60. $\dfrac{x+9}{x+3}-2=\dfrac{4x}{2-x}$?