Esercizi sulla scomposizione (fattorizzazione) di polinomi

Scomporre (fattorizzare) i seguenti polinomi:

1. $4x^2y - x^2y^3$;
2. $x^2yz + xy^2 + xy$;
3. $x^6 + y^6$;
4. $a^2bx + ab^2y + ax + by$;
5. $ax^4 - ay^4$;
6. $a^2x + 2ax + x + a^2y^2 + 2ay^2 + y^2$;
7. $ax^3 - by^3 + bx^3 - ay^3$;
8. $x^3y + 2x^2y + 2xy + y$;
9. $x^2y^2z^2 + 4x^2y^2z + 3x^2y^2$;
10. $xyz^2 + 10xyz + 25xy$.

Soluzioni

1. Eseguendo dapprima la messa in evidenza totale di x^2y e, successivamente scomponendo la differenza di quadrati $4-y^2$, risulta:

   $$\underbrace{4x^2y - x^2y^3}_{\text{raccoglimento totale di } x^2y} = x^2y \underbrace{(4-y^2)}_{\text{differenza di due quadrati}} = x^2y(2+y)(2-y)$$

   e, in definitiva,

   $$4x^2y - x^2y^3 = x^2y(2+y)(2-y)$$

2. Procedendo ad un raccoglimento totale di xy, si ha:

   $$x^2yz + xy^2 + xy = xy(xz + y + 1)$$

3. Poiché, in generale, $\alpha^6 = (\alpha^2)^3$, si ha:

   $$x^6 + y^6 = \underbrace{(x^2)^3 + (y^2)^3}_{\text{somma di due cubi}} = (x^2+y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

4. Il polinomio può essere riscritto come

   $$a^2bx + ax + ab^2y + by$$

   da cui, mettendo in evidenza ax tra il primo ed il secondo termine e by tra gli altri due,

   $$a^2bx + ax + ab^2y + by = ax(ab+1) + by(ab+1)$$

   e, raccogliendo $ab+1$ che è comune a tutti i termini,

   $$a^2bx + ax + ab^2y + by = (ab+1)(ax+by)$$

   che è la scomposizione cercata.

5. Mettendo in evidenza a, si ottiene:

   $$ax^4 - ay^4 = a(\underbrace{x^4 - y^4}_{\text{differenza di due quadrati}}) = a(x^2+y^2)(\underbrace{x^2 - y^2}_{\text{differenza di due quadrati}}) =$$

   $$= a(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

   e, in definitiva, la scomposizione cercata è

   $$ax^4 - ay^4 = a(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$$

6. Procedendo al raccoglimento parziale di x tra i primi tre termini e di y^2 tra gli ultimi tre, si ha:

$$a^2x + 2ax + x + a^2y^2 + 2ay^2 + y^2 = x(a^2 + 2a + 1) + y^2(a^2 + 2a + 1)$$

da cui, mettendo in evidenza $a^2 + 2a + 1$ e notando che tale trinomio è il quadrato del binomio $a + 1$,

$$a^2x + 2ax + x + a^2y^2 + 2ay^2 + y^2 = (x + y^2)(a + 1)^2$$

7. Per la proprietà commutativa della somma algebrica, il polinomio

$$P = ax^3 - by^3 + bx^3 - ay^3$$

può essere riscritto come

$$P = ax^3 + bx^3 - ay^3 - by^3$$

da cui, mettendo in evidenza x^3 tra i primi due termini e $-y^3$ tra gli ultimi due,

$$P = x^3(a + b) - y^3(a + b)$$

Raccogliamo, adesso, $a + b$.

Si ha:

$$P = (a + b)(x^3 - y^3)$$

da cui, scomponendo la differenza di due cubi $x^3 - y^3$,

$$P = (a + b)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

8. Procedendo al raccoglimento totale di y, si ha:

$$x^3y + 2x^2y + 2xy + y = y(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$$

Posto

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

risulta $P(-1) = 0$ cosicché $P(x)$ è divisibile per $x + 1$ in accordo col teorema di Ruffini.

Eseguendo la divisione, si ha:

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

per cui la scomposizione cercata è

$$x^3y + 2x^2y + 2xy + y = y(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

9. Procedendo con un raccoglimento totale di x^2y^2, si ha:

$$x^2y^2z^2 + 4x^2y^2z + 3x^2y^2 = x^2y^2(z^2 + 4z + 3)$$

Posto $P(z) = z^2+4z+3$ e ricordando che un trinomio di secondo grado della forma

$$z^2 + sz + p$$

si scompone come

$$z^2 + sz + p = (x + \alpha)(x + \beta)$$

se $\alpha\beta = p$, $\alpha + \beta = s$, risulta

$$P(z) = (z + 1)(z + 3)$$

Ne segue

$$x^2y^2z^2 + 4x^2y^2z + 3x^2y^2 = x^2y^2(z + 1)(z + 3)$$

10. Raccogliendo xy che è comune a tutti termini del polinomio, si ha:

$$xyz^2 + 10xyz + 25xy = xy(z^2 + 10z + 25) = xy(z + 5)^2$$

essendo $z^2 + 10z + 25$ il quadrato del binomio $z + 5$.